Übungsblatt 9

Geometrie WS 2018/19

Lösungsansatz Aufgabe 4

Aufgabe 4 (5 + 3 Punkte)
(i) Gegeben seien zwei parallele Geraden, sowie ein Kreis $K = K(M, r)$, der komplett dazwischen liegt. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal alle Kreise, die die beiden Geraden und den Kreis jeweils in genau einem Punkt berühren. Diskutieren Sie die Durchführbarkeit, Korrektheit und Vollständigkeit Ihrer Konstruktion. Wieviele Lösungen gibt es?
(ii) Erläutern Sie was sich ändert, wenn der Kreis bezüglich der Geraden beliebig liegen darf.

Lösungsansatz:Zu (i) Herleitung: Die Geraden seien mit g und h bezeichnet, mit $L = K(P, s)$ ein solcher gesuchter Kreis. P muss auf der Geraden k liegen, die parallel zu g und damit auch h ist und deren Punkte von beiden geraden denselben Abstand s haben, da PA und PB Lote von P auf g bzw. h sind. Da K komplett zwischen g und l liegt, folgt $r < s$. L kann also nicht im Inneren von K liegen. Nun gibt es zwei Fälle: K liegt im Inneren von L oder nicht. Im ersten Fall ist $|MP| = s - r$ im zweiten $|MP| = s + r$.

Konstruktion: 1. Konstruiere eine Senkrechte zu g in beliebigem Punkt A.
2. Sei B der Schnittpunkt dieser mit h
3. Konstruiere die Mittelsenkrechte m von AB.
4. Zeichne einen Strahl in M. Dessen Schnittpunkt mit K sei mit C bezeichnet.
5. Zeichne einen Kreis in M mit Radius s. Der Schnittpunkt sei mit D bezeichnet.
6. Konstruiere einen Kreis um M mit Radius $|CD| = s - r$. Dieser schneidet m in ein oder zwei Punkten P und Q.
7. Die beiden Kreise $K(P, s)$ und $K(Q, s)$ sind Lösungen, die von K von innen berührt werden
8. Zeichne Kreis in C mit Radius s. Der Schnittpunkt sei mit E bezeichnet.
9. Konstruiere Kreis um M mit Radius $|ME| = r + s$. Dieser schneidet m in zwei Punkten R und S.
10. Die beiden Kreise $K(R, s)$ und $K(S, s)$ sind Lösungen, die K von außen berühren.

Durchführbarkeit und Anzahl der Lösungen: zu 2. Schnittpunkt existiert wegen Eindeutigkeit der Parallelen aus dem Parallelenaxiom.
zu 6. und 9.: Der Abstand von M zu g und h ist mindestens r. Liege M und g auf derselben Seite von m (der Fall, dass M und h auf derselben Seite von m liegen geht analog). Dann gilt für den Abstand d von M zu m: $s = d + d(M, g) > d + r$ also $r + s > s - r > d$. Also haben der jeweilige Kreis in M und m einen nichtleeren Durchschnitt. Im Falle, dass L K enthält, gibt es nur eine Lösung, falls der Kreis in 6. m tangential berührt, was ausgeschlossen war. Das ist genau dann der Fall, wenn $r = s/2$ und K berührt g oder h tangential. $r - s$ ist auch ausgeschlossen, da der Kreis K dann auch nicht vollständig zwischen den Geraden liegt.

Korrektheit: m ist parallel zu g und h nach Umkehrung des Wechselwinkelsatzes. Wegen des Satzes vom Parallelogramm hat jeder Punkt auf m zu g und h denselben Abstand s. Ein Kreis mit Mittelpunkt auf m und Radius s berührt g und h also genau in den Fußpunkten der Lote von P auf die Geraden.

Zu 7. $|PM| = |QM| = s - r$ nach Konstruktion. Also berühren sich $K(P, s)$ und $K(M, r)$ in genau einem Punkt, wobei $K(M, r)$ den konstruierten Kreis von innen berührt.

zu 10. $|RM| = |SM| = r + s$. Also berühren sich $K(P, s)$ und $K(M, r)$ in genau einem Punkt von außen.

Zu (ii) Zunächst mal gibt es natürlich keine Lösung wenn K komplett außerhalb der Menge zwischen den beiden Geraden liegt.

Liegt K bis auf genau einen Berührpunkt zwischen den Geraden, gibt es drei Lösungen (siehe (i)), berührt K beiden Geraden, gibt es zwei oder drei je nachdem, ob man $L = K$ also Lösung ansieht oder nicht. Ich entscheide mich für nicht - also zwei.

Enthalte nun K Punkte genau zwischen g und h. Das gleiche Prozedere wie von 8.-10. liefert sicher zwei Lösungen.
Ist $r > s$, so könnte es eine Lösung L geben, die K von innen berührt. P muss dann auf dem Kreis um M mit Radius $r - s$ liegen. Dieser kann nun genau einen oder genau zwei Schnittpunkte mit m besitzen und dann gibt es eine oder zwei weitere Lösungen.
Ist $r < s$ könnte nur noch K die Lösung L von innen berühren. Dann hätte das Innere von L Punkte, die nicht zwischen g und h liegen, was wegen der Konvexit¨t der Punktmenge zwischen g und h ausgeschlossen ist.