Übungsblatt 9

Geometrie WS 2018/19

Lösungsansätze Rückseite

Aufgabe: Seien K und L zwei Kreise, die genau einen Punkt P gemeinsam haben. Zwei Geraden g und h durch P schneiden K und L in A und C bzw. B und D. Zeigen Sie dass $AB \parallel CD$. Hinweis: Wie können die Kreise zueinander liegen? Machen Sie ggf. eine Fallunterscheidung.

Lösungsansatz: Man betrachte die gemeinsame Tangente t. (i) Angenommen die Kreise berühren sich von außen. Seien E und F Punkte auf t auf verschiedenen Seiten von P. Sei C der Punkt, so dass E und C auf verschiedenen Seiten von $G(P, D)$ liegen und A der Punkt, so dass A und F auf verschiedenen Seiten von $G(P, B)$ liegen. Dann gilt $\measuredangle(DPE) \cong \measuredangle(FPB)$ (Scheitelwinkel) und $\measuredangle(DPE) \cong \measuredangle(PCD)$ sowie $\measuredangle(FPB) \cong \measuredangle(PAB)$ (Tangentansatz plus Umfangswinkelsatz). Insgesamt also $\measuredangle(PCD) \cong \measuredangle(PAB)$. Aus der Umkehrung des Wechslewinkelsatzes folgt $AB \parallel CD$. (ii) Berührt ein Kreis den zweiten von innen, ist die Beweisidee dieselbe. Es wird dann nur ein Punkt $E \in t$ benötigt.
Fertigen Sie sich eine Skizze dazu an!

Aufgabe: Seien K und L zwei Kreise, die sich in genau zwei Punkten P und Q schneiden. Sei weiterhin g eine Gerade, die beide Kreise tangential in $R \in K$ bzw. $S \in L$ berührt, so dass diese, bis auf die Berührpunkte, auf einer Seite der Geraden liegen. Zeigen Sie, dass $\measuredangle(RQS)$ und $\measuredangle(RPS)$ Nebenwinkel zueinander sind.

Lösungsansatz: Liege P außerhalb von $\Delta(Q, R, S)$ (sonst vertausche man Bezeichnungen von P und Q). Aus Tangenten- und Umfangswinkelsatz folgt, dass $\measuredangle(SRQ) \cong \measuredangle(RPQ)$ sowie $\measuredangle(RSQ) \cong \measuredangle(SPQ)$. Weiterhin ist $|\measuredangle(RPS)| = |\measuredangle(RPQ)| + |\measuredangle(SPQ)|$ und zusammen mit der Innenwinkelsumme im Dreieck folgt $|\measuredangle(RPS)| + |\measuredangle(RQS)| = \pi$, also die Behauptung.

Aufgabe: Gegeben seien zwei Kreise $K = K(M, r)$ und $L = K(N, s)$ mit ihren Mittelpunkte. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal alle Geraden, die gleichzeitig Tangenten an K und an L sind. Beschrnken Sie sich zunächst auf den Fall, dass die Kreise einen nichtleeren Durchschnitt besitzen.

Lösungsansatz: Sei $r > s$. Dann sind die gesuchten zwei Tangenten parallel zu einer der beiden Tangenten an $K' = K(M, r - s)$, die durch N gehen (Charakterisierung der Tangenten plus Umkehrung des Stufenwinkelsatzes).
Konstruktion (kurz): 1. Konstruiere die Tangenten an K' durch N sowie deren Berührpunkte P, Q mit K'. 2. Bestimme Schnittpunkte P', Q' der Strahlen in M durch P bzw. Q mit K. 3. Konstruiere Senkrechte in P' bzw. Q' zu diesen Strahlen. Dies sind die gesuchten Tangenten.
Die Korrektheit beweist man, indem man zeigt, dass das Viereck, dass durch die Eckpunkte N, M, P' sowie den Senkrechten in P' zu MP' sowie in N zu MN ein Rechteck ist, dessen vierter Eckpunkt R $|NR| = |MP'| = s$ erfüllt, also $R \in L$ sowie $NR \perp G(R, P')$, also ist $G(R, P'$ tangential an L in R. Dass es eine Tangente an K in P' ist, folgt nach Konstruktion, da die senkrecht auf MP' steht.