# Klausur

## Geometrie WS 2018/19

### 21.2.2019

**Aufgabe 1 (3 + 5 Punkte)**
Für diese Aufgabe seien alle Axiome bis auf das Parallelenaxiom vorausgesetzt.
Eine Konstruktion der Winkelhalbierenden: Sei $\angle(h,k)$ ein Winkel mit Scheitelpunkt $O$. Seien $A, B$ zwei verschiedene Punkte auf $h$ und $C, D$ auf $k$, alle verschieden von $O$.
(a) Sei $A \in OB$ und $C \in OD$. Zeigen Sie, dass sich die Strecken $AD$ und $BC$ im Inneren des Winkels $\angle(h,k)$ schneiden.
(b) Sei $P$ der Schnittpunkt aus (a). Sei weiterhin $OA \cong OC$ und $OB \cong OD$. Beweisen Sie, dass der Strahl in $O$ durch $P$ die Winkelhalbierende ist.
Hinweis: Die Verwendung des Kongruenzsatzes [SsW] in dieser Aufgabe führt sehr oft zu Fehlern. Für den Beweis wird er nicht unbedingt benötigt.

**Aufgabe 2 (3 + 5 Punkte)**
Für diese Aufgabe seien alle Axiome vorausgesetzt.
(a) Formulieren Sie zwei Strahlensätze und eine mögliche Umkehrung.
(b) Zeigen Sie, dass sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. In welchem Verhältnis teilt dieser Schnittpunkt jede der Strecken vom Eckpunkt zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 3 (2 + 3 + 4 Punkte)**
Für diese Aufgabe seien alle Axiome vorausgesetzt.
(a) Formulieren Sie den Sehnen–Tangentenwinkelsatz.
Seien $K$ und $L$ zwei verschiedene Kreise.
(b) Zeigen Sie: $K$ und $L$ berühren sich genau dann in genau einem Punkt $P$, wenn sie eine gemeinsame Tangente in $P$ besitzen.
(c) Angenommen $K$ und $L$ berühren sich in $P$ von außen. Seien $g$ und $h$ zwei verschiedene Geraden durch $P$, die nicht tangential an $K$ oder $L$ sind. Bezeichne $A$ und $C$ die von $P$ verschiedenen Schnittpunkte von $g$ mit $K$ bzw. $L$ sowie $B$ und $D$ die von $P$ verschiedenen Schnittpunkte von $h$ mit $K$ bzw. $L$. Beweisen Sie, dass dann $AB$ parallel zu $CD$ ist.

**Aufgabe 4 (2 + 5 + 3 Punkte)**
Für diese Aufgabe seien alle Axiome vorausgesetzt.
(a) Formulieren Sie den Sinussatz der Vorlesung für Dreiecke der euklidischen Ebene. Wie berechnet sich der Umkreisradius aus den Seitenlängen und den Innenwinkeln?
(b) Beweisen Sie die in (a) getroffenen Aussagen.
(c) $s$ sei die Länge eines Schenkels in einem gleichschenkligen Dreieck und $h$ die Länge der Höhe auf die Basis. Bestimmen Sie den Radius des Umkreises.

**Aufgabe 5 (1 + 2 + 2 Punkte)**
Für diese Aufgabe seien alle Axiome bis auf das Parallelenaxiom vorausgesetzt.
(a) Definieren Sie den Begriff der Isometrie.
(b) Welche Arten von Teilmengen können Fixpunktmenge einer Isometrie sein (ohne Begründung)?
(c) Geben Sie für jede Möglichkeit in (b) ein Beispiel für eine Isometrie an (die Nennung eines Begriffes genügt).