WS 2018/19

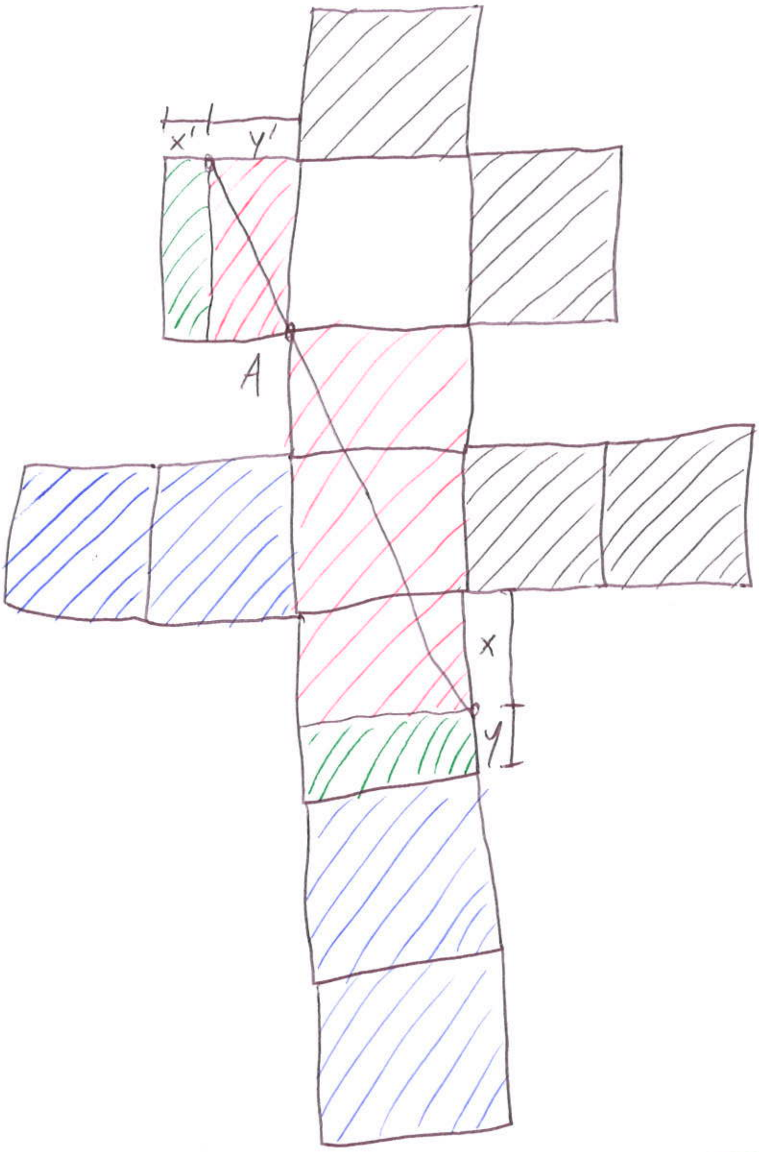
Geometrie

Beweisidee von Aufgabe 1 auf dem Knobelblatt

Bemerkung: Die folgende Beweisidee ist natürlich noch keine vollständige Lösung. Für eine vollständige Lösung sind die Behauptungen und einzelnen Schritte des Textes näher zu erläutern und zu erklären.

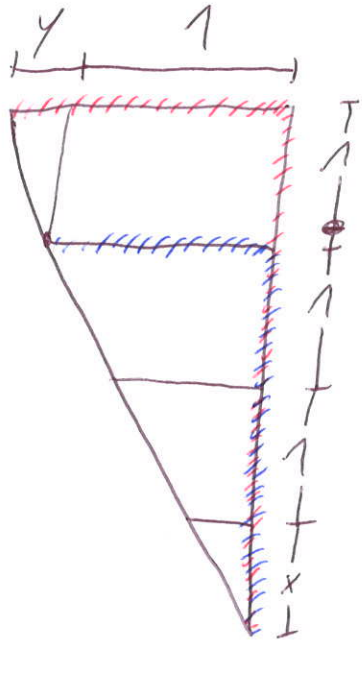
Man kann die Aufgabe lösen, indem man die Gerade einfach in kartesischen Koordinaten ausrechnet. Im folgenden Beweis muss man sich die Hände aber nicht so schmutzig machen.

- Wir nehmen an, dass die Seitenlänge der Quadrate gleich 1 ist.
- Zuerst überlegt man sich, durch einfaches wegstreichen der blau und schwarz schrafierten Quadrate, dass die Gerade g so wie in der Abbildung liegen muss.
- Als nächstes bemerkt man, dass der rot schrafierte Bereich durch g in zwei gleich große Teile geteilt wird. Es folgt, dass die Gerade g das gesamte Erzbischofkreuz in zwei gleich große Teile teilt genau dann, wenn die beiden grün schraffierten Flächen genauso groß wie ein Einheitsquadrat sind. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn $x = x'$ und $y = y'$ gilt.
- Um die Gerade g zu bestimmen (und zu konstruieren) reicht es also aus x zu bestimmen (und zu konstruieren).
- Dazu benutzen wir den Strahlensatz für die beiden Dreiecke wie in der Skizze unten angedeutet und erhalten
$$\frac{1+1+x}{1} = \frac{1+1+1+x}{1+y}.$$
Diese Gleichung ist äquivalent zu $x^2 + x - 1 = 0$. und wird durch
$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$
gelöst, was das Inverse des goldenen Schnittes (oder dem goldenen Schnitt minus Eins) entspricht.
- Für die Konstruktion reicht es also aus eine Strecke mit dieser Länge zu konstruieren.



$x = x'$

$y = y'$



$$\frac{1+1+x}{1} = \frac{1+1+1+x}{1+y}$$