
Knobelblatt

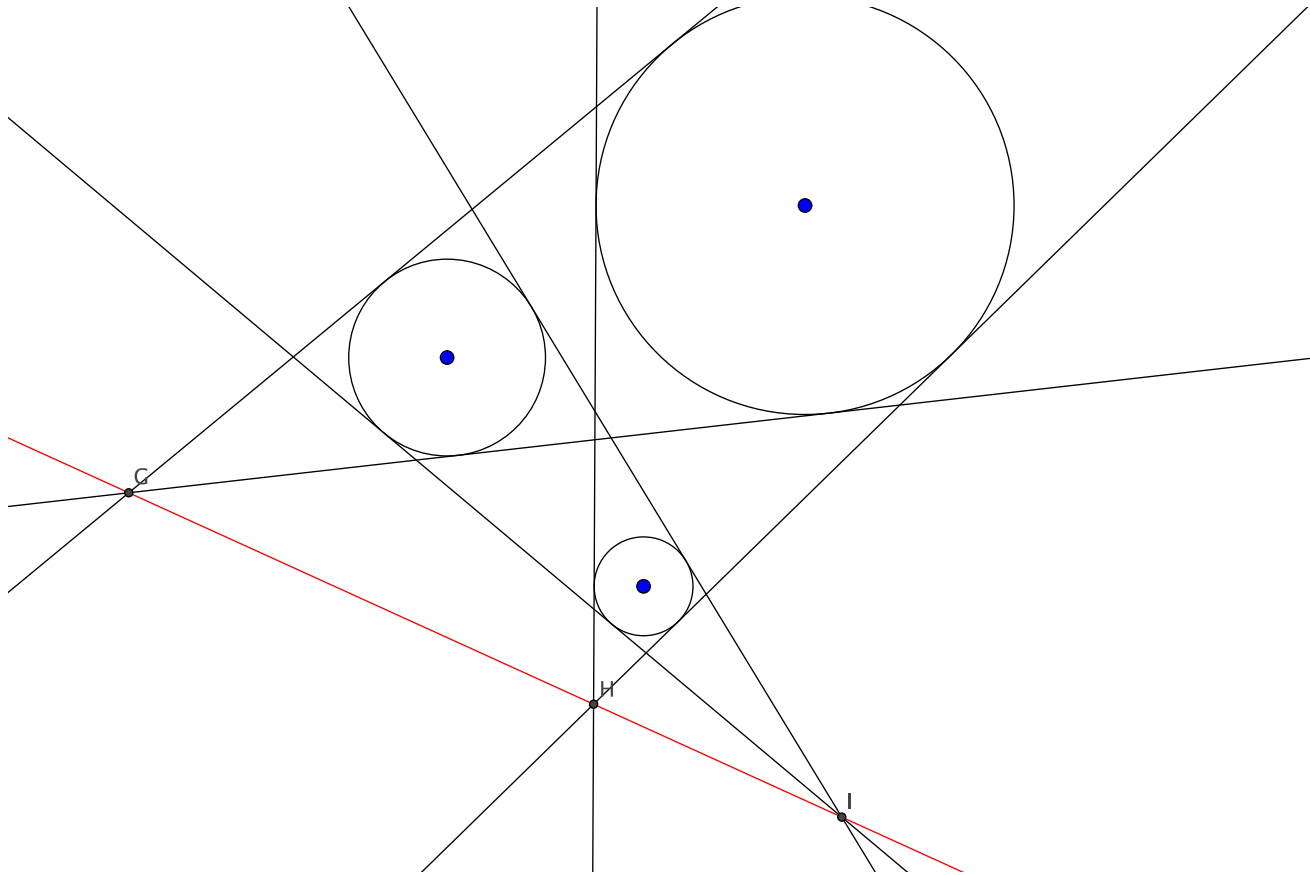
Geometrie WS 2018/19

Lösung der 2. Knobelaufgabe

Aufgabe 2

Manchmal hilft es, seinen Blick in höhere Dimensionen zu weiten:

In der Ebene seien drei Kreise mit unterschiedlichen Radien so gelegen, dass sie nicht ineinander liegen. Die gemeinsamen äußeren Tangenten schneiden sich jeweils in einem Punkt G, H und I . Beweisen Sie, dass diese drei Punkte auf einer Geraden liegen.



Lösung: Man denke sich drei Kugeln im Raum, deren Ränder mit Sphären bezeichnet werden. Der Schnitt mit einer Ebene, die durch die drei Mittelpunkte geht, sind dann die drei Kreise. Wir betrachten zunächst zwei Sphären. Die gemeinsamen äußeren Tangenten sind als Tangenten an die Sphären dadurch charakterisiert, dass die Berührradien parallel (und nicht windschief!) in \mathbb{R}^3 sind und als Vektoren vom Mittelpunkt aus gleichgerichtet sind (die inneren Tangenten wären entgegengesetzt zueinander). Die Menge aller solcher Tangenten an die beiden Sphären (d.h. also Tangenten mit parallelen, gleichgerichteten Berührradien) bildet einen Kegel in \mathbb{R}^3 ; der Scheitelpunkt ist der gemeinsame Schnittpunkt aller dieser Tangenten. Das sieht man, indem man die Halbebene durch die Mittelpunkte, die eine solche Tangente enthält, um die Gerade, die die beiden Mittelpunkte enthält, rotiert.

Nun ist anschaulich klar, dass es zwei Ebenen gibt, die alle drei Sphären von außen berühren (man kann ja die zugehörigen Kugeln auf einen Tisch legen und damit den Tisch auch an die fixierten Kugeln legen). Die Berührradien von allen drei Mittelpunkten sind parallel, da es nur einen Normalenvektor für eine Ebene in \mathbb{R}^3 bis auf Vielfaches gibt und gleichgerichtet, da die Sphären auf einer Seite jeder der Ebenen liegen. Jede der Ebenen enthält also für jedes Paar von Sphären genau eine Tangente, der Art, die eingangs diskutiert wurde. Die beiden Tangenten, die zu einem Paar Sphären gehören, schneiden sich nun im Scheitelpunkt des Kegels, der außerdem Schnittpunkt der Tangentialebenen sein muss. Die drei solchen Schnittpunkte G', H', I' liegen insbesondere auf der Schnittmenge der Ebenen. Das ist aber eine Gerade.

Wegen der eingangs geführten Diskussion sind diese drei Schnittpunkte auch die Schnittpunkte G, H, I der äußeren gemeinsamen Tangenten an die Kreise, die durch die Schnittmenge der Ebene durch die drei Mittelpunkte mit den Sphären gegeben sind und liegen andererseits auf der Schnittgerade der beiden äußeren Tangentialebenen.