

Seminar: Markovprozesse

Mehrdimensionaler Kalman-Bucy Filter in stetiger Zeit

Achille Mbope
Dominic Arnold

Wir betrachten das n-dimensionale lineare Filterproblem, das beschrieben wird durch die folgenden SDE's:

$$\begin{aligned} dX_t &= F(t)X_t dt + C(t)dU_t && \text{lineares System} && (1) \\ dZ_t &= G(t)X_t dt + D(t)dV_t && \text{lineare Beobachtung} && (2) \end{aligned}$$

wobei $F : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $G : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$, $C : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$ sowie $D : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^{m \times r}$ matrixwertige Funktionen sind, die auf beschränkten Intervallen $[0, T]$ beschränkt sein sollen. Die Prozesse $(U_t, t \geq 0)$ und $(V_t, t \geq 0)$ seien voneinander unabhängige p- bzw. r-dimensionale Brownsche Bewegungen. Weiterhin sei X_0 normalverteilt und unabhängig von U sowie V , $Z_0 = 0$ und $D(t)D(t)^T$ sei invertierbar.

Das Filterproblem besteht nun darin, einen Prozeß $(\hat{X}_t, t \geq 0)$ zu finden, der die folgende Punkte erfüllt:

- \hat{X}_t ist $\mathcal{G}_t := \sigma(Z_s, s \leq t)$ -meßbar
- \hat{X}_t minimiert den L^2 -Abstand unter allen Zufallsvariablen $Y \in \mathcal{K}(Z, t) := \{Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n; Y \in L^2(\mathbb{P}) \text{ und } Y \mathcal{G}_t\text{-meßbar}\}$.

Dann ist der eindeutig bestimmte Prozeß, der die obigen Bedingungen erfüllt, gegeben durch:

$$\hat{X}_t = \mathcal{P}_{\mathcal{K}(Z,t)}(X_t) = \mathbb{E}[X_t | \mathcal{G}_t].$$

Der Prozeß $(\hat{X}_t, t \geq 0)$ wird auch Kalman-Bucy Filter in stetiger Zeit genannt. Wir werden sehen, dass \hat{X} selber eine SDE erfüllt. Die Konstruktion gliedert sich in insgesamt 5 Schritte:

Schritt 1

Betrachte den folgenden Raum $\mathcal{L}(Z, t) := cl\{C_0 + C_1 Z_{s_1} + \dots + C_n Z_{s_n}; C_0 \in \mathbb{R}^n, C_i \in \mathbb{R}^{n \times m} \text{ mit } s_1, \dots, s_n \leq t \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}(Z,t)}(X_t) = \mathcal{P}_{\mathcal{K}(Z,t)}(X_t) = \hat{X}_t.$$

Schritt 2

Wir betrachten den Innovationsprozeß $(N_t, t \geq 0)$, der durch

$$N_t := Z_t - \int_0^t G(s)\hat{X}_s ds$$

definiert ist. Es lässt sich zeigen, dass $\mathcal{L}(N, t) = \mathcal{L}(Z, t)$ gilt und somit natürlich auch $\hat{X}_t = \mathcal{P}_{\mathcal{L}(N,t)}(X_t)$.

Schritt 3

Man kann zeigen, dass der folgende Prozeß $(R_t, t \geq 0)$ eine m-dimensionale Brownsche Bewegung ist:

$$R_t = \int_0^t (D(s)D(s)^T)^{-\frac{1}{2}} dN_s.$$

Desweiteren gilt, dass $\mathcal{L}(N, t) = \mathcal{L}(R, t)$ und der Prozeß $(\hat{X}_t, t \geq 0)$ die folgende Gestalt hat:

$$\hat{X}_t = \mathbb{E}X_t + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \mathbb{E}[X_t R_s] dR_s.$$

Schritt 4

Der Prozeß

$$X_t = \exp\left(\int_r^t F(s)ds\right)X_r + \int_r^t \exp\left(\int_s^t F(u)du\right)C(s)dU_s$$

ist eine Lösung der SDE 1.

Schritt 5

Zunächst lässt sich zeigen, dass die Matrix $S(t) := \mathbb{E}\left[(X_t - \hat{X}_t)(X_t - \hat{X}_t)^T\right]$ eine Matrix-Riccati-Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{dS}{dt} = FS - SF^T + SG^T(DD^T)^{-1}GS + CC^T.$$

Daraus kann man schlußfolgern, dass dann der Kalman-Bucy Filter die SDE

$$d\hat{X}_t = (F - SG^T(DD^T)^{-1}GS)\hat{X}_tdt + SG^T(DD^T)^{-1}dZ_t \quad (3)$$

erfüllen muss.