Seminarvortrag: Zeitumkehr und Ergodensatz

1.9 Zeitumkehr

Theorem 1.9.1:
Sei P eine irreduzible stochastische Matrix und besitze eine invariante Verteilung π.
Sei $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ Markov(π, P) und $Y_n := X_{N-n} \quad \forall n \leq N$

Dann gilt: $(Y_n)_{0\leq n\leq N}$ ist Markov(π, $\hat{P}$), wobei $\hat{P}$= ($\hat{p}_{ij}$) definiert ist durch

$$\pi_j \, \hat{p}_{ji} = \pi_i \, p_{ij} \qquad \forall \, i, j$$

und $\hat{P}$ ist irreduzibel mit invarianter Verteilung π.

Definitionen:
1) Eine solche Kette $(Y_n)_{0\leq n\leq N}$ heißt dann Zeitumkehr von $(X_n)_{0\leq n\leq N}$

2) Sei P irreduzibel und $(X_n)_{n\geq 0}$ Markov(π, P). Dann heißt $(X_n)_{n\geq 0}$ reversibel, falls:
$\forall N \geq 1$ ist $(X_{N-n})_{0\leq n\leq N}$ ebenfalls Markov(π, P).

3) Eine stochastische Matrix P und eine Verteilung λ sind in detaillierter Balance, falls:

$$\lambda_j \, p_{ji} = \lambda_i \, p_{ij} \qquad \forall \, i, j$$

Lemma 1.9.2:
Wenn P und λ in detaillierter Balance sind, dann ist λ invariant für P.

Theorem 1.9.3:
Sei P irreduzibel, λ eine Verteilung und $(X_n)_{n\geq 0}$ Markov(λ, P).

Dann sind äquivalent:

(a) $(X_n)_{n\geq 0}$ ist reversibel
(b) P und λ sind in detaillierter Balance

1.10 Ergodensatz

Einschub: Starkes Gesetz der großen Zahlen:
Seien $(\mathrm{Y_n})_{\mathrm{n}\geq 1}$ i.i.d., nicht negativ und $\mathrm{E}[\mathrm{Y_i}] = \mu$.
Dann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{Y_i} = \mu \quad \mathbb{P}-\mathrm{f.s.}$$

Definition:
Sei $(\mathrm{X_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ eine Markov-Kette. Dann bezeichne $\mathrm{V_i(n)}$ die Häufigkeit, mit der $(\mathrm{X_k})$ vor dem n-ten Schritt den Zustand i erreicht, d.h.:

$$\mathrm{V_i(n)} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}-1} 1_{\{\mathrm{X_k} = \mathrm{i}\}}$$

Bemerkung: $\frac{\mathrm{V_i(n)}}{n}$ ist dann also die proportionale Zeit, welche die Markov-Kette in den ersten n Schritten im Zustand i verbringt.

Theorem 1.10 (Ergodensatz von Birkhoff):
Sei P irreduzibel, λ eine Verteilung und $(\mathrm{X_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ Markov(λ, P).
Dann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{V_i(n)}}{n} = \frac{1}{\mathrm{E_i[T_i]}} \quad \mathbb{P}-\mathrm{f.s.}$$

Außerdem gilt für P rekurrent, $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt und $(\pi_\mathrm{i})_{i\epsilon I}$ invariante Verteilung von $(\mathrm{X_n})$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}-1} \mathrm{f(X_k)} = \bar{\mathrm{f}} := \sum_{\mathrm{i}\epsilon \mathrm{I}} \pi_\mathrm{i}\, \mathrm{f(i)} \quad \mathbb{P}-\mathrm{f.s.}$$