

### **Theorem 1.9.1:**

Sei  $P$  eine irreduzible stochastische Matrix und besitze eine invariante Verteilung  $\pi$ .

Sei  $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$  Markov( $\pi, P$ ) und  $Y_n := X_{N-n} \quad \forall n \leq N$

Dann gilt:  $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$  ist Markov( $\pi, \hat{P}$ ), wobei  $\hat{P} = (\hat{p}_{ij})$  definiert ist durch

$$(\ast) \quad \pi_j \hat{p}_{ji} = \pi_i p_{ij} \quad \forall i, j$$

und  $\hat{P}$  ist irreduzibel mit invarianter Verteilung  $\pi$ .

### **Lemma 1.9.2:**

Wenn  $P$  und  $\lambda$  in detaillierter Balance sind, dann ist  $\lambda$  invariant für  $P$ .

### **Theorem 1.9.3:**

Sei  $P$  eine irreduzible stochastische Matrix,  $\lambda$  eine Verteilung und  $(X_n)_{n \geq 0}$  Markov( $\lambda, P$ ).

Dann sind äquivalent:

- (a)  $(X_n)_{n \geq 0}$  ist reversibel
- (b)  $P$  und  $\lambda$  sind in detaillierter Balance

(Wdh) Starkes Gesetz der großen Zahlen:

Seien  $(Y_n)_{n \geq 1}$  i.i.d., nicht negativ und mit Erwartungswert  $E[Y_i] = \mu$ .

Dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \mu \quad \mathbb{P} - \text{f. s.}$$

**Theorem 1.10:** Sei  $P$  irreduzibel,  $\lambda$  eine Verteilung und  $(X_n)_{n \geq 0}$  Markov( $\lambda, P$ ).

Dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_i(n)}{n} = \frac{1}{E_i[T_i]} \quad \mathbb{P} - \text{f. s.}$$

Außerdem gilt für  $P$  rekurrent,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und  $(\pi_i)_{i \in I}$  invariante Verteilung von  $(X_n)$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \bar{f} := \sum_{i \in I} \pi_i f(i) \quad \mathbb{P} - \text{f. s.}$$