Kalman-Bucy-Filter

Vortrag im Rahmen des Seminars Markovprozesse
(Bernhardt)

Definition *Abzählbare Familien* (X_n), (a_n) $\mathbb{R}^d$-$\mathcal{ZV}$ *und* (Y_n), (b_n) $\mathbb{R}^k$-$\mathcal{ZV}$ *auf* $(\Omega, F, \mathbb{P})$; *abzählbare Familien* (A_n) *aus* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ *und* (B_n) *aus* $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d$; *mit:*

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= A_{n+1} X_n \quad + a_{n+1} \quad \textit{für} \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ Y_{n+1} &= B_{n+1} X_{n+1} + b_{n+1} \quad \textit{für} \quad n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

wobei X_0, (a_n), (b_n) *unabhängig;* $X_0 \sim \mathcal{N}$ *und* $a_n \sim \mathcal{N}(0, Var(a))$ *und* $b_n \sim \mathcal{N}(0, Var(b))$; $Var(b)$ *invertierbar.*

Obige Definitionen werden zusammengefasst in $\mathcal{F}ilter(A, B, X, Y, a, b)(\Omega, F, \mathbb{P})$.

Das Berechnen von $\mathbb{P}[X_n|(Y_i)_{i=1}^n](\omega)$ *für* $\mathbb{P}$*-fa* $\omega \in \Omega$ *heißt Filterproblem.*

$E[X_n|(Y_i)_{i=1}^n](\omega)$ *heißt Schätzung und* $Var[X_n|(Y_i)_{i=1}^n](\omega)$ *heißt Güte der Schätzung für* $\omega \in \Omega$ *(falls existent, wird sich auch als dieses herausstellen).*

Lemma 1 Z_i $(S_i, \mathcal{S}_i)$-$\mathcal{ZV}(\Omega, F, \mathbb{P})$ *für* $i \in \{0, 1\}$ *unabhängig;* $f \geq 0$ $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_0$*-messbar; dann gilt für* $\mathbb{P}$*-fa* $\omega \in \Omega$ *:*

$$E[f(Z_1, Z_0)|Z_0](\omega) = E[f(Z_1, Z_0(\omega))].$$

Lemma 2 X, Y $\mathbb{R}^d$-, $\mathbb{R}^k$-$\mathcal{ZV}(\Omega, F, \mathbb{P})$; (X, Y) *normalverteilt;* $Var(Y)$ *invertierbar; dann gilt für* $\mathbb{P}$*-fa* $\omega \in \Omega$ *:*

$$\mathbb{P}[X|Y](\omega) = \mathcal{N}(\hat{X}(w), \hat{V}),$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{X} &= E[X|Y] &&= E[X] + Cov(X, Y) \cdot Var^{-1}(Y) \cdot (Y - E[Y]) \quad \mathbb{P}\textit{-fs} \\ \hat{V} &= Var(X - \hat{X}) &&= Var(X) - Cov(X, Y) \cdot Var^{-1}(Y) \cdot Cov(Y, X). \end{aligned}$$

Lemma 3 X, Y, Z $\mathbb{R}^d$-, $\mathbb{R}^k$-, $\mathbb{R}^l$-$\mathcal{ZV}(\Omega, F, \mathbb{P})$; (X, Y, Z) *normalverteilt;* $Var(Y), Var(Z)$ *invertierbar;* $\hat{X}$, $\hat{V}$ *wie in Lemma 2; dann gilt für* $\mathbb{P}$*-fa* $\omega \in \Omega$ *:*

$$\mathbb{P}[X|Y, Z](\omega) = \mathcal{N}(\hat{\hat{X}}(w), \hat{\hat{V}}),$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{\hat{X}} &= \hat{X} + Cov(X, Z) \cdot Var^{-1}(Y) \cdot (Z - E[Z]) \\ \hat{\hat{V}} &= \hat{V} - Cov(X, Z) \cdot Var^{-1}(Z) \cdot Cov(Z, X). \end{aligned}$$

Satz (**Kalman-Bucy-Filter**) $\mathcal{F}ilter(A, B, X, Y, a, b)(\Omega, F, \mathbb{P})$; *dann gilt für* $\mathbb{P}$*-fa* $\omega \in \Omega$ *:*

$$\mathbb{P}[X_n|(Y_i)_{i=1}^n](\omega) = \mathcal{N}(\hat{X}_n(w), \hat{V}_n),$$

wobei $\hat{X}_n$, $\hat{V}_n$ *rekursiv gegeben sind durch:*

$$\hat{X}_0 = E[X_0], \quad \hat{V}_0 = Var(X_0), \quad H_{n+1} = A_{n+1}\hat{V}_n A_{n+1}^T + Var(a),$$

schreibe statt A_{n+1} A, *statt* B_{n+1} B, *statt* H_{n+1} H,

$$\begin{array}{rcl} \hat{X}_{n+1} & = & A\hat{X}_n + HB^T \cdot (BHB^T + Var(b))^{-1} \cdot (Y_{n+1} - BA\hat{X}_n) \\ \hat{V}_{n+1} & = & H \quad - HB^T \cdot (BHB^T + Var(b))^{-1} \cdot BH. \end{array}$$