

Klassenstruktur, *hitting times*, Rekurrenz/Transienz

Handzettel

08. Dezember 2010

$(X_t)_{t \geq 0}$ sei im folgenden stets ein minimaler Markovprozess mit Erzeugermatrix Q .

Erinnerung an wichtige Definitionen

- *Sprungzeiten* J_0, J_1, \dots

$$J_0 = 0, \quad J_{n+1} = \inf\{t \geq J_n : X_t \neq X_{J_n}\}$$

- *Verweildauern*

$$S_n = \begin{cases} J_n - J_{n-1} & \text{falls } J_{n-1} < \infty \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

- *Sprungkette* $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $Y_n := X_{J_n}$
- *Sprungmatrix* $\Pi = (\pi_{ij})_{i,j \in I}$ zu Q

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{-q_{ii}} & \text{falls } j \neq i \text{ und } q_{ii} \neq 0 \\ 0 & \text{falls } j \neq i \text{ und } q_{ii} = 0 \end{cases}$$

$$\pi_{ii} = \begin{cases} 0 & \text{falls } q_{ii} \neq 0 \\ 1 & \text{falls } q_{ii} = 0 \end{cases}$$

- Wir schreiben auch $q_i := -q_{ii}$

Definitionen zu *hitting times*

- *hitting time* einer Menge $A \subset I$: "Zeitpunkt des ersten Eintreffens in die Menge A "

$$D^A(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\}$$

- Wahrscheinlichkeit, bei Start in $i \in I$ irgendwann in A einzutreffen

$$h_i^A = \mathbb{P}_i(D^A < \infty)$$

- Erwartete/mittlere Dauer, bis man auf A trifft (bei Start in i)

$$k_i^A = \mathbb{E}_i(D^A)$$

Definitionen und Ergebnisse zu Rekurrenz und Transienz

- Ein Zustand i heißt *rekurrent*, falls

$$\mathbb{P}_i(\{t \geq 0 : X_t = i\} \text{ ist unbeschränkt}) = 1.$$

- Ein Zustand i heißt *transient*, falls

$$\mathbb{P}_i(\{t \geq 0 : X_t = i\} \text{ ist unbeschränkt}) = 0.$$

- Hauptresultat:

Satz. *Es gilt:*

- (i) *Falls i für die Sprung-Kette $(Y_n)_{n \geq 0}$ rekurrent ist, so ist i für $(X_t)_{t \geq 0}$ rekurrent.*
- (ii) *Falls i für die Sprung-Kette $(Y_n)_{n \geq 0}$ transient ist, so ist i für $(X_t)_{t \geq 0}$ transient.*