Seminar Markovprozesse

Klassenstruktur, Hitting times, Rekurrenz/Transienz in stetiger Zeit

HU Berlin

WS 10/11

SS 2010

1. Klassenstruktur
2. Hitting times und Absorptionswahrscheinlichkeiten
3. Rekurrenz und Transienz

Ziel

Übertragung der Begriffe *Klassenstruktur, hitting times, Rekurrenz, Transienz* auf den Fall stetiger Zeit.

Definition (analog zum diskreten Fall)

Ein Zustand i ist von einem Zustand j aus erreichbar ($i \to j$), falls

$$\mathbb{P}_i(X_t = j \text{ für ein } t > 0) > 0.$$

Falls $i \to j$ und $j \to i$ gilt, so schreiben wir $i \leftrightarrow j$ und sagen, dass die Zustände i und j kommunizieren.

Proposition

Es sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *Markovprozess und* Y *die Sprungkette. Es seien* $i, j \in I$ *mit* $i \neq j$*. Dann sind äquivalent*

(i) $i \to j$ *für* X

(ii) $i \to j$ *für die Sprungkette* Y

Beweis.

Es reicht zu zeigen:

$$\exists t > 0\, X_t = j \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\, Y_n = j$$

$\square$

Beweis.

Es reicht zu zeigen:

$$\exists t > 0\, X_t = j \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\, Y_n = j$$

"$\Rightarrow$" Es gebe ein $t \geq 0$ mit $X_t = j$. Da X ein minimaler Prozess ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $Y_n = X_t$.

□

Beweis.

Es reicht zu zeigen:

$$\exists t > 0\, X_t = j \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\, Y_n = j$$

"$\Leftarrow$" Es gebe $n \in \mathbb{N}$ mit $Y_n \equiv X_{J_n} = X_t$.

$\square$

Beweis.

Es reicht zu zeigen:

$$\exists t > 0\, X_t = j \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\, Y_n = j$$

"$\Leftarrow$" Es gebe $n \in \mathbb{N}$ mit $Y_n \equiv X_{J_n} = X_t$.

Da der Prozess X rechtsstetig ist, gilt

□

Beweis.

Es reicht zu zeigen:

$$\exists t > 0 \, X_t = j \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \, Y_n = j$$

"$\Leftarrow$" Es gebe $n \in \mathbb{N}$ mit $Y_n \equiv X_{J_n} = X_t$.

Da der Prozess X rechtsstetig ist, gilt

$$J_n \equiv \inf\{t \geq J_{n-1} : X_t \neq X_{J_n}\} = \min\{t \geq J_{n-1} : X_t \neq X_{J_n}\}$$

□

Beweis.

Es reicht zu zeigen:

$$\exists t > 0\, X_t = j \;\Leftrightarrow\; \exists n \in \mathbb{N}\, Y_n = j$$

"$\Leftarrow$" Es gebe $n \in \mathbb{N}$ mit $Y_n \equiv X_{J_n} = X_t$.

Da der Prozess X rechtsstetig ist, gilt

$$J_n \equiv \inf\{t \geq J_{n-1} \,:\, X_t \neq X_{J_n}\} = \min\{t \geq J_{n-1} \,:\, X_t \neq X_{J_n}\}$$

Also existiert $t \geq 0$ mit $J_n = t$. Also $X_t = X_{J_n} = Y_n = j$.

$\square$

$\rightarrow$ Rückführung der Klassenstruktur von X auf die Klassenstruktur der Sprungkette $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$

→ Rückführung der Klassenstruktur von X auf die Klassenstruktur der Sprungkette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

→ Übertragung der Begriffe *kommunizierende Klasse*, *geschlossene Klasse*, *absorbierender Zustand* und *Irreduzibilität* über die Sprungkette.

Definition

Die *hitting time* einer Teilmenge von I ist die Zufallsvariable D^A mit

$$D^A(\omega) = \inf\{t \geq 0 \,:\, X_t(\omega) \in A\}$$

Mit

$$h_i^A := \mathbb{P}_i(D^A < \infty)$$

bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, bei Start in i irgendwann A zu treffen.

Definition

Die *hitting time* einer Teilmenge von I ist die Zufallsvariable D^A mit

$$D^A(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\}$$

Mit

$$h_i^A := \mathbb{P}_i(D^A < \infty)$$

bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, bei Start in i irgendwann A zu treffen.

Falls A abgeschlossene Klasse: *Absorptionswahrscheinlichkeit*

Falls $(X_t)_{t \geq 0}$ minimal ist, erhalten wir

$$\{H^A < \infty\} = \{D^A < \infty\}$$

Auf diesen Mengen gilt dann $D^A = J_{H^A}$.

Satz

Der Vektor der hitting probabilities $h^A = (h_i^A : i \in I)$ *ist die minimale nichtnegative Lösung des linearen Gleichungssystems*

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & \text{für } i \in A \\ \sum_{j \in I} q_{ij} h_j^A = 0 & \text{für } i \notin A \end{cases}$$

Beweis.

Wende das Resultat für zeitlich diskrete Markovprozesse auf die Spungmatrix Π an.

$\square$

Beweis.

Wende das Resultat für zeitlich diskrete Markovprozesse auf die Spungmatrix Π an.

Erinnerung: h^A als minimale nichtnegative Lösung von

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & \text{für } i \in A \\ h_i^A = \sum_{j \in I} \pi_{ij} h_j^A & \text{für } i \notin A \end{cases}$$

$\square$

Beweis.

Wende das Resultat für zeitlich diskrete Markovprozesse auf die Spungmatrix Π an.

Zusammenhang Erzeugermatrix $Q \leftrightarrow$ Sprungmatrix Π liefert das Ergebnis.

$\square$

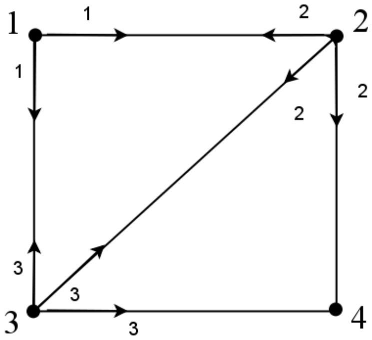
Definition

Es bezeichne

$$k_i^A = \mathbb{E}_i(D^A)$$

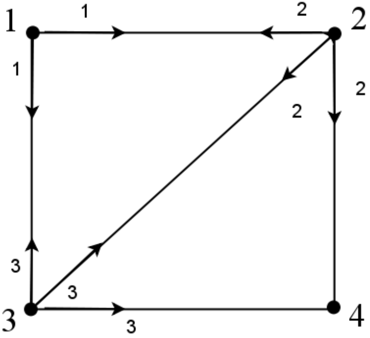
die mittlere Zeit, die X benötigt um A zu treffen.

Beispiel



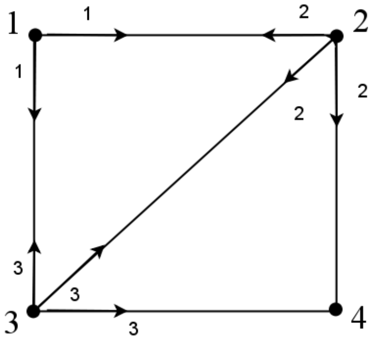
Mittlere Zeit um beginnend bei 1 auf den Zustand 4 zu treffen?

Beispiel



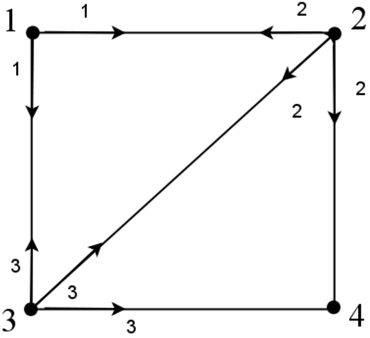
$$k_1^{\{4\}} =$$

Beispiel



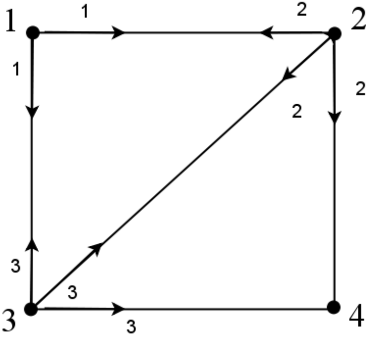
$$k_1^{\{4\}} = \frac{1}{2} +$$

Beispiel



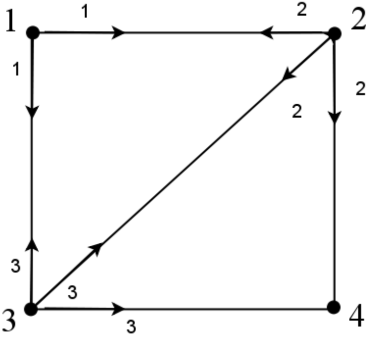
$$k_1^{\{4\}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} k_2^{\{4\}} +$$

Beispiel



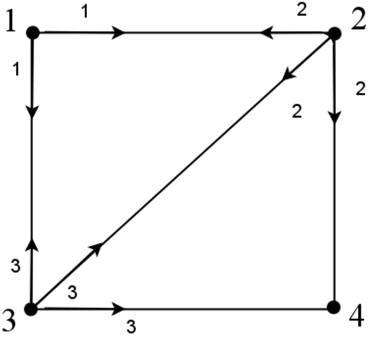
$$k_1^{\{4\}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} k_2^{\{4\}} + \frac{1}{2} k_3^{\{4\}}$$

Beispiel



$$k_1^{\{4\}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} k_2^{\{4\}} + \tfrac{1}{2} k_3^{\{4\}}$$
$$k_2^{\{4\}} = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} k_1^{\{4\}} + \tfrac{1}{3} k_3^{\{4\}}$$
$$k_3^{\{4\}} = \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3} k_1^{\{4\}} + \tfrac{1}{3} k_2^{\{4\}}$$

Beispiel



$$
\begin{aligned}
k_1^{\{4\}} &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} k_2^{\{4\}} + \tfrac{1}{2} k_3^{\{4\}} \\
k_2^{\{4\}} &= \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} k_1^{\{4\}} + \tfrac{1}{3} k_3^{\{4\}} \\
k_3^{\{4\}} &= \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3} k_1^{\{4\}} + \tfrac{1}{3} k_2^{\{4\}}
\end{aligned}
$$

Allgemein gilt der folgende Satz:

Satz

Für alle $i \in A$ gelte $q_i > 0$. Dann ist der Vektor der mittleren hitting times $k^A = (k_i^A : i \in I)$ die minimale nichtnegative Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & \text{für } i \in A \\ -\sum_{j \in I} q_{ij} k^A = 1 & \text{für } i \notin A \end{cases}$$

Satz

Für alle $i \in A$ gelte $q_i > 0$. Dann ist der Vektor der mittleren hitting times $k^A = (k_i^A : i \in I)$ die minimale nichtnegative Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & \text{für } i \in A \\ -\sum_{j \in I} q_{ij} k^A = 1 & \text{für } i \notin A \end{cases}$$

Anschauung:

Satz

Für alle $i \in A$ gelte $q_i > 0$. Dann ist der Vektor der mittleren hitting times $k^A = (k_i^A : i \in I)$ die minimale nichtnegative Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & \text{für } i \in A \\ -\sum_{j \in I} q_{ij} k^A = 1 & \text{für } i \notin A \end{cases}$$

Anschauung: Zweite Gleichung äquivalent zu

$$k_i^A = -q_{ii}^{-1} + \sum_{j \neq i} \pi_{ij} k_j^A$$

(siehe Beispiel)

Definition

Ein Zustand i heißt *rekurrent*, falls

$$\mathbb{P}_i(\{t \geq 0 \,:\, X_t = i\} \quad \text{ist unbeschränkt}) = 1.$$

Definition

Ein Zustand i heißt *rekurrent*, falls

$$\mathbb{P}_i(\{t \geq 0 \,:\, X_t = i\} \quad \text{ist unbeschränkt}) = 1.$$

Ein Zustand i heißt *transient*, falls

$$\mathbb{P}_i(\{t \geq 0 \,:\, X_t = i\} \quad \text{ist unbeschränkt}) = 0.$$

Erinnerung (Explosionszeit)

$$\zeta := \sup_n J_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$$

Erinnerung (Explosionszeit)

$$\zeta := \sup_n J_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$$

Lemma

$(X_t)_{t\geq 0}$ sei ein Markov-Prozess mit Erzeuger-Matrix Q. Falls $X_0 = i$ gilt und i für die Sprung-Kette rekurrent ist, gilt $\zeta = \infty$.

Erinnerung (Explosionszeit)

$$\zeta := \sup_n J_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$$

Lemma

$(X_t)_{t\geq 0}$ sei ein Markov-Prozess mit Erzeuger-Matrix Q. Falls $X_0 = i$ gilt und i für die Sprung-Kette rekurrent ist, gilt $\zeta = \infty$.

Satz

Es gilt:

(i) *Falls i für die Sprung-Kette $(Y_n)_{n\geq 0}$ rekurrent ist, so ist i für $(X_t)_{t\geq 0}$ rekurrent.*

(ii) *Falls i für die Sprung-Kette $(Y_n)_{n\geq 0}$ transient ist, so ist i für $(X_t)_{t\geq 0}$ transient.*

Folgerung

Es gilt:

(i) *i rekurrent für die Sprung-Kette $\Leftrightarrow$ i rekurrent für $(X_t)_{t\geq 0}$.*

(ii) *i transient für die Sprung-Kette $\Leftrightarrow$ i transient für $(X_t)_{t\geq 0}$.*

Folgerung

Es gilt:

(i) *i rekurrent für die Sprung-Kette $\Leftrightarrow$ i rekurrent für $(X_t)_{t\geq 0}$.*

(ii) *i transient für die Sprung-Kette $\Leftrightarrow$ i transient für $(X_t)_{t\geq 0}$.*

Folgerung

Es gilt:

(i) *Jeder Zustand ist entweder rekurrent oder transient.*

(ii) *Rekurrenz und Transienz sind Klassen-Eigenschaften.*

Wir definieren die Zeit des ersten Eintretens in den Zustand i *(first passage time)* als

$$T_i(\omega) = \inf\{t \geq J_1 \,:\, X_t(\omega) = i\}$$

Wir definieren die Zeit des ersten Eintretens in den Zustand i *(first passage time)* als

$$T_i(\omega) = \inf\{t \geq J_1 \,:\, X_t(\omega) = i\}$$

Lemma

Es sei $q_i > 0$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) *i ist rekurrent.*

(ii) $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$

(iii) $\int_0^\infty p_{ii}(t)dt = \infty$

Satz

Es gilt:

(i) *Falls* $q_i = 0$ *oder* $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$ *gilt, so ist* i *rekurrent und* $\int_0^\infty p_{ii}(t)dt = \infty$.

(ii) *Falls* $q_i > 0$ *und* $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$ *gilt, so ist* i *transient und* $\int_0^\infty p_{ii}(t)dt < \infty$.

Lemma

Es sei $q_i > 0$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) *i ist rekurrent.*

(ii) $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$

(iii) $\int_0^\infty p_{ii}(t)dt = \infty$

Satz

Es gilt:

(i) *Falls $q_i = 0$ oder $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$ gilt, so ist i rekurrent und $\int_0^\infty p_{ii}(t)dt = \infty$.*

(ii) *Falls $q_i > 0$ und $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$ gilt, so ist i transient und $\int_0^\infty p_{ii}(t)dt < \infty$.*