Rekurrenz und Transienz

Raphaël Jotterand

1 Definitionen

- Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix P. Der Zustand i heißt ***rekurrent***, wenn

$$\mathbb{P}_i(X_n = i \quad \text{für unendl. viele } n) = 1.$$

- Der Zustand i heißt ***transient***, falls

$$\mathbb{P}_i(X_n = i \quad \text{für unendl. viele } n) = 0.$$

- Die ***erste Eintrittszeit*** in den Zustand i ist die Zufallsvariable T_i , definiert durch

$$T_i(\omega) = \inf\{n \geq 1 : X_n(\omega) = 1\}.$$

wobei $\inf \emptyset = 0$.

- Die ***r-te Eintrittszeit*** $T_i^{(r)}$ nach i wird rekursiv definiert durch

$$T_i^{(0)}(\omega) = 0, T_i^{(1)}(\omega) = T_i(\omega).$$

und, für $r = 0, 1, 2, ...,$

$$T_i^{(r+1)}(\omega) = \inf\left\{n \geq T_i^{(r)}(\omega) + 1 : X_n(\omega) = i\right\}.$$

- Die ***Länge*** der r-ten Rückkehrzeit nach i ist definiert durch

$$S_i^{(r)} = \begin{cases} T_i^{(r)} - T_i^{(r-1)} & \text{falls } T_i^{(r-1)} < \infty; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Der Zustand j ist vom Zustand i ***erreichbar***, in Zeichen $i \to j$, wenn gilt

$$\mathbb{P}_i(X_n = j \quad \text{für ein } n \geq 0) > 0.$$

wenn zusätzlich $j \to i$ gilt, sagt man, dass ***i mit j kommuniziert***, und schreibt $i \leftrightarrow j$. "$\leftrightarrow$" ist eine Äquivalenzrelation, die I in ***kommunizierende Klassen*** zerlegt.

- Eine Klasse C ist ***abgeschlossen***, wenn gilt

$$\text{aus} \quad i \in C, i \to j \quad \text{folgt} \quad j \in C.$$

- Eine Markovkette, deren Zustandsraum aus einer einzigen kommunizierenden Klasse besteht, heisst ***irreduzibel***.

2 Sätze

Theorem 1 *Es besteht die folgende Alternative:*

(i) Wenn $P_i(T_i < \infty) = 1$*, dann ist* i *rekurrent und* $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$*;*

(ii) wenn $P_i(T_i < \infty) < 1$*, dann ist* i *transient und* $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$*.*

Theorem 2 *Sei* C *eine kommunizierende Klasse. Dann sind die Zustände von* C *entweder alle transient oder alle rekurrent.*

Theorem 3 *Alle rekurrenten Klassen sind abgeschlossen.*

Theorem 4 *Alle endlichen und abgeschlossenen Klassen sind rekurrent.*