

Rekurrenz und Transienz

Raphaël Jotterand

1 Definitionen

- Sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix P . Der Zustand i heißt **rekurrent**, wenn

$$\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ für unendl. viele } n) = 1.$$

- Der Zustand i heißt **transient**, falls

$$\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ für unendl. viele } n) = 0.$$

- Die **erste Eintrittszeit** in den Zustand i ist die Zufallsvariable T_i , definiert durch

$$T_i(\omega) = \inf \{n \geq 1 : X_n(\omega) = i\}.$$

wobei $\inf \emptyset = 0$.

- Die **r -te Eintrittszeit** $T_i^{(r)}$ nach i wird rekursiv definiert durch

$$T_i^{(0)}(\omega) = 0, T_i^{(1)}(\omega) = T_i(\omega).$$

und, für $r = 0, 1, 2, \dots$,

$$T_i^{(r+1)}(\omega) = \inf \left\{ n \geq T_i^{(r)}(\omega) + 1 : X_n(\omega) = i \right\}.$$

- Die **Länge** der r -ten Rückkehrzeit nach i ist definiert durch

$$S_i^{(r)} = \begin{cases} T_i^{(r)} - T_i^{(r-1)} & \text{falls } T_i^{(r-1)} < \infty; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Der Zustand j ist vom Zustand i **erreichbar**, in Zeichen $i \rightarrow j$, wenn gilt

$$\mathbb{P}_i(X_n = j \text{ für ein } n \geq 0) > 0.$$

wenn zusätzlich $j \rightarrow i$ gilt, sagt man, dass i **mit j kommuniziert**, und schreibt $i \leftrightarrow j$. " \leftrightarrow " ist eine Äquivalenzrelation, die I in **kommunizierende Klassen** zerlegt.

- Eine Klasse C ist **abgeschlossen**, wenn gilt

$$\text{aus } i \in C, i \rightarrow j \text{ folgt } j \in C.$$

- Eine Markovkette, deren Zustandsraum aus einer einzigen kommunizierenden Klasse besteht, heisst **irreduzibel**.

2 Sätze

Theorem 1 *Es besteht die folgende Alternative:*

(i) *Wenn $P_i(T_i < \infty) = 1$, dann ist i rekurrent und $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$;*

(ii) *wenn $P_i(T_i < \infty) < 1$, dann ist i transient und $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.*

Theorem 2 *Sei C eine kommunizierende Klasse. Dann sind die Zustände von C entweder alle transient oder alle rekurrent.*

Theorem 3 *Alle rekurrenten Klassen sind abgeschlossen.*

Theorem 4 *Alle endlichen und abgeschlossenen Klassen sind rekurrent.*