# 1 Markov Chain Monte Carlo

Gegeben: Zufallsvariable X auf Zustandsraum $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ und Verteilung $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$
Gesucht: Übergangsmatrix P mit Grenzverteilung $\pi$

- Wähle eine Übergangsmatrix R auf S
- Setze

$$P_{i,j} = \begin{cases} R_{i,j} \wedge (\frac{\pi_j}{\pi_i} \cdot R_{j,i}) & \text{, für } i \neq j \\ 1 - \sum_{j \neq i} P_{i,j} & \text{, für } i = j \end{cases} \tag{1}$$

Es gilt Invarianz von $\pi$ bezüglich P: $\pi_i \cdot P_{i,j} = \pi_j \cdot P_{j,i}$

In der Praxis wählt man R wie folgt:

- Wähle einen nicht-orientierten Graphen G auf S, so dass $\forall i \neq j \;\; \exists n \geq 1, \{t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}\} \subset S : t_1 = s_i \wedge t_{n+1} = s_j$ $\wedge \forall 1 \leq k \leq n : (t_k, t_{k+1}) \in G$
- Wähle R so, dass : $R_{i,j} > 0 \Leftrightarrow (s_i, s_j) \in G$

  **Gibbs-Sampler**:

$$R_{i,j} = \begin{cases} (\sum_{\{l:(s_i,s_l) \in G\}} \pi_l)^{-1} \cdot \pi_j & \text{, für } (s_i, s_j) \in G \\ 0 & \text{, für } (s_i, s_j) \notin G \end{cases} \tag{2}$$

  **Metropolis-Algorithmus**:

$$R_{i,j} = \begin{cases} (n_i)^{-1} & \text{, für } (s_i, s_j) \in G \\ 0 & \text{, für } (s_i, s_j) \notin G \end{cases} \tag{3}$$

mit $n_i = |\{l : (s_i, s_l) \in G\}|$

**Hastings-Algorithmus**:

- Für festes $X_n = s_i$ simuliere man $Y_n$ nach $R_{i,\bullet}$
- Mit simuliertem $Y_n = s_j$ wird in einer neuen unabhängigen Simulation $X_{n+1}$ nach

$$X_{n+1} = \begin{cases} Y_n & \text{, mit Wahrscheinlichkeit } \frac{\pi_j \cdot R_{j,i}}{\pi_i \cdot R_{i,j}} \wedge 1 \\ X_n & \text{, mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \frac{\pi_j \cdot R_{j,i}}{\pi_i \cdot R_{i,j}} \wedge 1 \end{cases} \tag{4}$$

  erzeugt.

# 2 Eine Anwendung

- Zustandsraum S der Form $S = E^{\Lambda}$ mit $s_i \in S$ als Zuteilung: $m \in \Lambda \longmapsto s_i(m) \in E$
- zwischen den Zeitpunkten n und n+1 wird nur eine Komponente von X geändert, d.h.
  $\exists m \in \Lambda : X_{n+1} \overset{m}{\sim} X_n$
- alle anderen Komponenten bleiben unverändert:
  $\forall m' \neq m : X_{n+1}(m') = X_n(m')$
- man wählt den Graphen G so, dass
  $(s_i, s_j) \in G \Leftrightarrow s_i$ und $s_j$ unterscheiden sich an genau einer Stelle
- Übergangsmatrix $P^{(m)}$ mit der Eigenschaft $P^{(m)}_{i,j} = 0$, wenn nicht $s_i \overset{m}{\sim} s_j$
- gegebene Übergangsmatrix $R^{(m)}$ mit $R^{(m)}_{i,j} \neq 0 \Leftrightarrow s_i \overset{m}{\sim} s_j$
- dann gilt: $\pi_i \cdot P^{(m)}_{i,j} = (\pi_i \cdot R^{(m)}_{i,j}) \wedge (\pi_j \cdot R^{(m)}_{j,i})$ und $P^{(m)}_{i,i} = 1 - \sum_{j \neq i} P^{(m)}_{i,j} \geq 0$

Hastings-Algorithmus:

- für gegebenes $X_n = s_i$ simulieren wir $Y_n$ nach $R^{(m)}_{i,\bullet}$
- mit so simuliertem $Y_n = s_j$ wähle man $X_{n+1}$ nach:

$$X_{n+1} = \begin{cases} Y_n & \text{, mit Wahrscheinlichkeit } \frac{\pi_j \cdot R^{(m)}_{j,i}}{\pi_i \cdot R^{(m)}_{i,j}} \wedge 1 \\ X_n & \text{, mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \frac{\pi_j \cdot R^{(m)}_{j,i}}{\pi_i \cdot R^{(m)}_{i,j}} \wedge 1 \end{cases} \tag{5}$$

Gibbs-Sampler:

- $P^{(m)}_{i,j} = R^{(m)}_{i,j} = (\sum_{s_l \overset{m}{\sim} s_i} \pi_l)^{-1} \cdot \pi_j$, falls $s_i \overset{m}{\sim} s_j$
- $X_{n+1}(m)$ wird nach $\pi$ unter den gegebenen anderen Komponenten gewählt

Metropolis-Algorithmus:

- $R^{(m)}_{i,j} = (|E| - 1)^{-1}$, falls $s_i \overset{m}{\sim} s_j$
- $P^{(m)}_{i,j} = (|E| - 1)^{-1} \cdot (\frac{\pi_j}{\pi_i} \wedge 1)$, falls $s_i \overset{m}{\sim} s_j$ und $s_i \neq s_j$
- man wählt zunächst gleichverteilt auf $E \setminus \{X_n(m)\}$ einen Wert $s^{(m)}_j$ am Punkt m
- dann ist $X_{n+1}(m) = s^{(m)}_j$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\pi_j}{\pi_i} \wedge 1$