

# schwache Lösungen von SDEs, das Martingalproblem und die starke Markoveigenschaft

Hauke Laing

February 22, 2011

## 1 Begriffe

### 1.1 kanonischer Raum stetiger Prozesse

Wir setzen  $C^d := C[0, \infty)^d :=$  Menge aller stetigen Funktionen von  $[0, \infty)$  nach  $\mathbb{R}^d$ . Auf  $C^d$  definieren wir den Prozess  $(x_t)_{t \geq 0}$  durch  $x_t(\omega) = \omega(t)$  und bezeichnen mit  $(\mathfrak{B}_t^d)$  die von  $(x_t)$  erzeugte Filtration mit  $\mathfrak{B}^d = \mathfrak{B}_\infty^d$ .

**Definition 1** Eine Abbildung  $\mu : [0, \infty) \times C^d \rightarrow \mathbb{R}$  nennen wir ein progressiv messbares Funktional, wenn für jedes  $t \geq 0$  die Einschränkung von  $\mu$  auf  $[0, t] \times C^d$  messbar ist bezüglich  $(\mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathfrak{B}_t^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ .

Beispiel: eine Borel-messbare Abbildung  $\mu : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  wird mit  $\tilde{\mu}(t, c) = \mu(t, c(t))$  zu einem progressiv messbaren Funktional.

**Definition 2** Es sei  $T$  eine Stoppzeit bezüglich der Filtration  $(\mathfrak{B}_t^d)$ . Die Kollektion aller Mengen  $A \in \mathfrak{B}^d$  mit der Eigenschaft  $A \cap \{T \leq t\} \in \mathfrak{B}_t^d$  für jedes  $t \geq 0$  bildet eine  $\sigma$ -Algebra, die wir mit  $\mathfrak{B}_T^d$  bezeichnen.

$\mathfrak{B}_T^d$  heißt die  $\sigma$ -Algebra der bis  $T$  beobachtbaren Ereignisse. Ist zum Beispiel  $T(\omega) = t$  für alle  $\omega$ , so ist  $\mathfrak{B}_T^d = \mathfrak{B}_t^d$ .

**Lemma 1** Es gilt  $\mathfrak{B}_T^d = \sigma(x(t \wedge T); 0 \leq t \leq \infty)$ . Insbesondere bildet die Kollektion  $\mathfrak{C}$  aller Zylindermengen der Form  $\{\omega \in C^d; (\omega(t_1 \wedge T), \dots, \omega(t_n \wedge T)) \in B\}$ ,  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  mit rationalen Randpunkten einen abzählbaren,  $\cap$ -stabilen Erzeuger von  $\mathfrak{B}_T^d$ .

Für  $t \geq 0$  definieren wir die Shift-Operatoren  $\theta_t : C^d \rightarrow C^d$  durch  $(\theta_t \omega)(s) = \omega(s+t)$ .

**Definition 3** Eine Familie  $(P^y; y \in \mathbb{R}^d)$  von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $(C^d, \mathfrak{B}^d)$  hat die starke Markoveigenschaft, wenn gilt:

(a) für jedes  $A \in \mathfrak{B}$  ist die Abbildung  $y \mapsto P^y(A)$  universell messbar;

(b)  $P^y(x_0 = y) = 1$  für alle  $y \in \mathbb{R}^d$ ;

(c) für jedes  $y \in \mathbb{R}^d, A \in \mathfrak{B}^d$  und jede  $(\mathfrak{B}_t^d)$ -Stoppzeit  $S$  gilt:

$$P^y(\theta_S^{-1}A | \mathfrak{B}_S^d)(\omega) = P^{\omega(S)}(A), \quad P^y\text{-f.a. } \omega \text{ auf } \{S < \infty\}.$$

## 1.2 das Martingalproblem

Es seien  $b_i, \sigma_{ij}; 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq r$  progressiv messbare Funktionale von  $[0, \infty) \times C^d$  nach  $\mathbb{R}$ . Mit  $a$  bezeichnen wir die  $d \times d$ -Matrix  $\sigma\sigma^T$ . Für  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$  und  $\omega \in C^d$  setzen wir

$$\mathcal{A}f(t, \omega) = \frac{1}{2}a_{ij}(t, \omega)\partial_i\partial_j f(\omega(t)) + b_i(t, \omega)\partial_i f(\omega(t)),$$

wobei wir die Einsteinsche Summenkonvention anwenden. Auf  $C^d$  definieren wir für  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$  den Prozess  $M^f$  durch

$$M_t^f(\omega) = f(\omega(t)) - f(\omega(0)) - \int_0^t \mathcal{A}f(s, \omega)ds.$$

Die Filtration  $(\mathfrak{B}_t^d)$  ist im Allgemeinen nicht vollständig, erfüllt also nicht die üblichen Bedingungen. Daher definieren wir für ein gegebenes Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  auf  $(C^d, \mathfrak{B}^d)$  die Filtration  $(\mathfrak{G}_t^d)$  durch

$$\mathfrak{G}_t^d = \bigcap_{s>t} \sigma(\mathfrak{B}_s^d \cup \mathcal{N}).$$

wobei  $\mathcal{N} = \{A \subseteq C^d : \text{es gibt ein } N \in \mathfrak{B}^d \text{ mit } A \subseteq N \text{ und } P(N) = 0\}$ .

**Definition 4** Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  auf  $(C^d, \mathfrak{B}^d)$ , unter dem für jedes  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$  der Prozess  $(M_t^f, \mathfrak{G}_t^d)$  ein stetiges, lokales Martingal ist, nennen wir eine Lösung des lokalen Martingalproblems für  $(a, b)$ .

**Definition 5** Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  auf  $(C^d, \mathfrak{B}^d)$ , unter dem für jedes  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$  der Prozess  $(M_t^f, \mathfrak{B}_t^d)$  ein stetiges Martingal ist, nennen wir eine Lösung des Martingalproblems für  $(a, b)$ .

Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$  betrachten wir die folgenden drei Bedingungen:

- (A) Es existiert eine schwache Lösung der stochastischen Differentialgleichung  $dX_t = b(t, X)dt + \sigma(t, X)dB_t$  mit der Anfangsverteilung  $\mu$ .
- (B) Es existiert eine Lösung des lokalen Martingalproblems  $(a, b)$  mit Anfangsverteilung  $\mu$ .
- (C) Es existiert eine Lösung des Martingalproblems  $(a, b)$  mit Anfangsverteilung  $\mu$ .

**Satz 1** (A) und (B) sind äquivalent und implizieren (C). Wenn die Koeffizienten  $b$  und  $\sigma$  die Form  $b(t, c) = b(c(t)), \sigma(t, c) = \sigma(c(t))$  haben und darüber hinaus auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}^d$  beschränkt sind, dann ist auch (C) äquivalent zu (A).

### 1.3 Martingale in stetiger Zeit

**Definition 6** Es sei  $X = (X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$  ein stochastischer Prozess auf  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Wenn eine monoton wachsende Folge  $(T_n)$  von Stoppzeiten mit  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty) = 1$  existiert, so dass die Prozesse  $(X_{t \wedge T_n}, \mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$  jeweils Martingale sind, dann nennen wir  $X$  ein lokales Martingal.

Der nächste Satz ist eine Version des Optional Sampling Theorems.

**Satz 2** Es sei  $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$  ein rechtsstetiges Martingal und  $S, T$  Stoppzeiten bezüglich  $(\mathfrak{F}_t)$  mit  $S \leq T$ . Unter der Annahme, dass  $T$  beschränkt ist, gilt dann  $P$ -fast sicher:

$$E(X_T | \mathfrak{F}_S) = X_S$$

### 1.4 reguläre bedingte Verteilung

**Definition 7** Es sei  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra. Eine Abbildung  $Q : \Omega \times \mathfrak{F} \rightarrow [0, 1]$  ist eine reguläre bedingte Verteilung für  $\mathfrak{F}$  gegeben  $\mathfrak{G}$ , wenn gilt:

- für jedes  $\omega \in \Omega$  ist  $Q(\omega, \bullet)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathfrak{F})$ ,
- für jedes  $A \in \mathfrak{F}$  ist die Abbildung  $\omega \mapsto Q(\omega, A)$  eine  $\mathfrak{G}$ -messbare Zufallsvariable,
- für jedes  $A \in \mathfrak{F}$  gilt  $P$ -fast sicher:  $Q(\omega, A) = P(A | \mathfrak{G})(\omega)$ .

**Satz 3** Angenommen  $\Omega$  ist ein polnischer Raum, ausgestattet mit der  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{B}(\Omega)$  der Borelmengen und einer Unter- $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{B}(\Omega)$ , und  $P$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega))$ . Dann existiert eine reguläre bedingte Verteilung für  $\mathfrak{B}(\Omega)$  gegeben  $\mathfrak{G}$  und sie ist eindeutig bestimmt.

**Lemma 2** In der Situation von Definition 7 gilt für eine  $\mathfrak{F}$ -messbare Zufallsvariable  $X$ :

$$E(X | \mathfrak{G})(\omega) = \int X(\rho) Q(\omega, d\rho), \quad P\text{-f.a. } \omega.$$

Inbesondere ist die rechte Seite stets  $\mathfrak{G}$ -messbar.

### 1.5 Filtrationen

Eine Filtration  $(\mathfrak{F}_t)$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  heißt rechtsstetig, wenn für alle  $t \geq 0$  gilt:

$$\mathfrak{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathfrak{F}_s;$$

und sie heißt vollständig, wenn  $\mathfrak{F}_0$  alle Teilmengen von  $P$ -Nullmengen aus  $\mathfrak{F}$  enthält. Wenn  $(\mathfrak{F}_t)$  vollständig und rechtsstetig ist, dann sagen wir,  $(\mathfrak{F}_t)$  erfüllt die üblichen Bedingungen.