schwache Lösungen von SDEs, das Martingalproblem und die starke Markoveigenschaft

Hauke Laing

22. Februar 2011

Die Markov-Eigenschaft

das Martingalproblem

die starke Markoveigenschaft schwacher Lösungen

zur Existenz von Lösungen

Markov-Familie

Definition

Eine d-dimensionale Markov-Familie ist ein adaptierter Prozess $X = (X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F})$ zusammen mit einer Familie $(P^y; y \in \mathbb{R}^d)$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathfrak{F})$ so dass gilt:

(a) für jedes $A \in \mathfrak{F}$ ist die Abbildung $y \mapsto P^y(A)$ universell messbar;

(b) $P^y(X_0 = y) = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$;

(c) für $y \in \mathbb{R}^d$, $s, t \geq 0$ und $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$P^y(X_{s+t} \in B | \mathfrak{F}_s) = P^{X_s}(X_t \in B), \quad P^y\text{-a.s.}$$

Markov-Familie

Definition

Eine d-dimensionale Markov-Familie ist ein adaptierter Prozess $X = (X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F})$ zusammen mit einer Familie $(P^y; y \in \mathbb{R}^d)$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathfrak{F})$ so dass gilt:

(a) für jedes $A \in \mathfrak{F}$ ist die Abbildung $y \mapsto P^y(A)$ universell messbar;

(b) $P^y(X_0 = y) = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$;

(c) für $y \in \mathbb{R}^d$, $s, t \geq 0$ und $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$P^y(X_{s+t} \in B | \mathfrak{F}_s) = P^{X_s}(X_t \in B), \quad P^y\text{-a.s.}$$

- Wir sagen auch: X hat die zeithomogene Markoveigenschaft.

- Für jedes $t \geq 0$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \kappa_t \ : \ \mathbb{R}^d \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow [0,1] \\ (y, B) &\longmapsto P^y(X_t \in B) \end{aligned}$$

ein stochastischer Kern.

- Für jedes $t \geq 0$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \kappa_t \ : \ \mathbb{R}^d \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow [0,1] \\ (y, B) &\longmapsto P^y(X_t \in B) \end{aligned}$$

ein stochastischer Kern.

- Damit können wir die Bedingung

$$P^y(X_{s+t} \in B | \mathfrak{F}_s) = P^{X_s}(X_t \in B)$$

schreiben als

$$P^y(X_{s+t} \in B | \mathfrak{F}_s) = \kappa_t(X_s, B), \quad P^y\text{-a.s.}$$

- Für jedes $t \geq 0$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \kappa_t \ : \ \mathbb{R}^d \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow [0,1] \\ (y, B) &\longmapsto P^y(X_t \in B) \end{aligned}$$

  ein stochastischer Kern.
- Damit können wir die Bedingung

$$P^y(X_{s+t} \in B | \mathfrak{F}_s) = P^{X_s}(X_t \in B)$$

  schreiben als

$$P^y(X_{s+t} \in B | \mathfrak{F}_s) = \kappa_t(X_s, B), \quad P^y\text{-a.s.}$$

- Die Familie $\big(\kappa_t(y, B); t \geq 0, y \in \mathbb{R}^d, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)\big)$ nennt man die Familie der Übergangswahrscheinlichkeiten von X.

Die Bedingung

(c)

für $y \in \mathbb{R}^d$, $s, t \geq 0$ und $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$P^y(X_{s+t} \in B | \mathfrak{F}_s) = P^{X_s}(X_t \in B), \quad P^y\text{-a.s.}$$

kann äquivalent ersetzt werden durch

(c')

für $y \in \mathbb{R}^d$, $s \geq 0$ und $F \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)})$,

$$P^y(X_{s+\bullet} \in F | \mathfrak{F}_s) = P^{X_s}(X_\bullet \in F), \quad P^y\text{-a.s.}$$

ein Beispiel

- Es sei $B = (B_t, \mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, (\Omega, \mathfrak{F}), (P^y; y \in \mathbb{R}^d)$ eine d-dimensionale Brownsche Familie.

ein Beispiel

- Es sei $B = (B_t, \mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, (\Omega, \mathfrak{F}), (P^y; y \in \mathbb{R}^d)$ eine d-dimensionale Brownsche Familie.
- Für $\mu \in \mathbb{R}^d$ und einen Automorphismus $\sigma \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ setzen wir

$$Y_t = \mu t + \sigma B_t; \quad (t \geq 0).$$

Den Prozess Y nennen wir eine d-dimensionale Brownsche Bewegung mit Driftkoeffizient μ und Streuungskoeffizient σ.

ein Beispiel

- Es sei $B = (B_t, \mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, (\Omega, \mathfrak{F}), (P^y; y \in \mathbb{R}^d)$ eine d-dimensionale Brownsche Familie.
- Für $\mu \in \mathbb{R}^d$ und einen Automorphismus $\sigma \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ setzen wir
$$Y_t = \mu t + \sigma B_t; \quad (t \geq 0).$$
Den Prozess Y nennen wir eine d-dimensionale Brownsche Bewegung mit Driftkoeffizient μ und Streuungskoeffizient σ.
- Dieser Prozess ist ein zeithomogener Markovprozess, d.h. $(Y_t, \mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, (\Omega, \mathfrak{F}), (P^{\sigma^{-1}y}; y \in \mathbb{R}^d)$ ist eine Markovfamilie.

ein Beispiel

- Es sei $B = (B_t, \mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, (\Omega, \mathfrak{F}), (P^y; y \in \mathbb{R}^d)$ eine d-dimensionale Brownsche Familie.
- Für $\mu \in \mathbb{R}^d$ und einen Automorphismus $\sigma \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ setzen wir

$$Y_t = \mu t + \sigma B_t; \quad (t \geq 0).$$

  Den Prozess Y nennen wir eine d-dimensionale Brownsche Bewegung mit Driftkoeffizient μ und Streuungskoeffizient σ.
- Dieser Prozess ist ein zeithomogener Markovprozess, d.h. $(Y_t, \mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, (\Omega, \mathfrak{F}), (P^{\sigma^{-1} y}; y \in \mathbb{R}^d)$ ist eine Markovfamilie.
- Die Voraussetzungen an die Koeffizienten lassen sich abschwächen, so dass sie von der Position des Prozesses abhängen dürfen. So erhalten wir eine stochastische Differentialgleichung.

ein Beispiel

- Es sei $B = (B_t, \mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, (\Omega, \mathfrak{F}), (P^y; y \in \mathbb{R}^d)$ eine d-dimensionale Brownsche Familie.
- Für $\mu \in \mathbb{R}^d$ und einen Automorphismus $\sigma \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ setzen wir

$$Y_t = \mu t + \sigma B_t; \quad (t \geq 0).$$

  Den Prozess Y nennen wir eine d-dimensionale Brownsche Bewegung mit Driftkoeffizient μ und Streuungskoeffizient σ.
- Dieser Prozess ist ein zeithomogener Markovprozess, d.h. $(Y_t, \mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, (\Omega, \mathfrak{F}), (P^{\sigma^{-1} y}; y \in \mathbb{R}^d)$ ist eine Markovfamilie.
- Die Voraussetzungen an die Koeffizienten lassen sich abschwächen, so dass sie von der Position des Prozesses abhängen dürfen. So erhalten wir eine stochastische Differentialgleichung.
- Es stellt sich die Frage, ob die Markoveigenschaft erhalten bleibt.

der kanonische Raum stetiger Prozesse

- Wir setzen $C^d := C[0,\infty)^d :=$ Menge aller stetigen Funktionen von $[0,\infty)$ nach $\mathbb{R}^d$.

der kanonische Raum stetiger Prozesse

- Wir setzen $C^d := C[0,\infty)^d :=$ Menge aller stetigen Funktionen von $[0,\infty)$ nach $\mathbb{R}^d$.
- Auf C^d betrachten wir den kanonischen Prozess (x_t) gegeben durch $x_t(\omega) = \omega(t)$ und die von (x_t) erzeugte Filtration

$$\mathfrak{B}_t^d = \sigma(x_s; 0 \leq s < t).$$

der kanonische Raum stetiger Prozesse

- Wir setzen $C^d := C[0,\infty)^d :=$ Menge aller stetigen Funktionen von $[0,\infty)$ nach $\mathbb{R}^d$.
- Auf C^d betrachten wir den kanonischen Prozess (x_t) gegeben durch $x_t(\omega) = \omega(t)$ und die von (x_t) erzeugte Filtration

$$\mathfrak{B}_t^d = \sigma(x_s; 0 \leq s < t).$$

- Wir setzen $\mathfrak{B}^d = \mathfrak{B}_\infty^d$. Dann ist $(C^d, \mathfrak{B}^d)$ ein polnischer Raum.

der kanonische Raum stetiger Prozesse

- Wir setzen $C^d := C[0,\infty)^d :=$ Menge aller stetigen Funktionen von $[0,\infty)$ nach $\mathbb{R}^d$.
- Auf C^d betrachten wir den kanonischen Prozess (x_t) gegeben durch $x_t(\omega) = \omega(t)$ und die von (x_t) erzeugte Filtration

$$\mathfrak{B}^d_t = \sigma(x_s; 0 \le s < t).$$

- Wir setzen $\mathfrak{B}^d = \mathfrak{B}^d_\infty$. Dann ist $(C^d, \mathfrak{B}^d)$ ein polnischer Raum.
- Einen stetigen Prozess $(X_t, \mathfrak{F}_t)$ auf $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ kann man als messbare Abbildung $X : \Omega \to C^d$ auffassen. Dann induziert X auf $(C^d, \mathfrak{B}^d)$ die Verteilung PX^{-1} und wir können an Stelle von X mit dem Prozess x unter PX^{-1} arbeiten.

- Frage: Wann ist $(x_t, \mathfrak{B}_t^d)$ zusammen mit einer gegebene Familie $(P^y; y \in \mathbb{R}^d)$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(C^d, \mathfrak{B}^d)$ eine Markov-Familie?

- Frage: Wann ist $(x_t, \mathfrak{B}_t^d)$ zusammen mit einer gegebene Familie $(P^y; y \in \mathbb{R}^d)$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(C^d, \mathfrak{B}^d)$ eine Markov-Familie?

Definition

(a) für jedes $A \in \mathfrak{B}^d$ ist die Abbildung $y \mapsto P^y(A)$ universell messbar;

(b) $P^y(x_0 = y) = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$;

(c) für $y \in \mathbb{R}^d$, $s \geq 0$ und $F \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)})$,

$$P^y(x_{s+\bullet} \in F \,|\, \mathfrak{B}_s^d) = P^{x_s}(x_\bullet \in F), \quad P^y\text{-a.s.}$$

- Frage: Wann ist $(x_t, \mathfrak{B}_t^d)$ zusammen mit einer gegebene Familie $(P^y; y \in \mathbb{R}^d)$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(C^d, \mathfrak{B}^d)$ eine Markov-Familie?

Definition

(a) für jedes $A \in \mathfrak{B}^d$ ist die Abbildung $y \mapsto P^y(A)$ universell messbar;

(b) $P^y(x_0 = y) = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$;

(c) für $y \in \mathbb{R}^d$, $s \geq 0$ und $F \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)})$,

$$P^y(x_{s+\bullet} \in F | \mathfrak{B}_s^d) = P^{x_s}(x_\bullet \in F), \quad P^y\text{-a.s.}$$

- In diesem Fall ist der Prozess x explizit gegeben. Damit lässt sich die Bedingung $P^y(x_{s+\bullet} \in F | \mathfrak{B}_s^d) = P^{x_s}(x_\bullet \in F)$ vereinfachen.

- Wir definieren die Shift-Operatoren $\theta_s : C^d \to C^d$ durch

$$(\theta_s \omega)(t) = \omega(s+t)$$

- Wir definieren die Shift-Operatoren $\theta_s : C^d \to C^d$ durch

$$(\theta_s \omega)(t) = \omega(s+t)$$

- Es gilt dann $x_t(\theta_s \omega) = \omega(s+t) = x_{s+t}(\omega)$, also:

$$x_{s+\bullet} = x_\bullet \circ \theta_s$$

- Wir definieren die Shift-Operatoren $\theta_s : C^d \to C^d$ durch

$$(\theta_s \omega)(t) = \omega(s+t)$$

- Es gilt dann $x_t(\theta_s \omega) = \omega(s+t) = x_{s+t}(\omega)$, also:

$$x_{s+\bullet} = x_\bullet \circ \theta_s$$

$\Longrightarrow$ Für $F \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)})$: $\{x_{s+\bullet} \in F\} = \theta_s^{-1}\{x_\bullet \in F\}$.

- Wir definieren die Shift-Operatoren $\theta_s : C^d \to C^d$ durch

$$(\theta_s \omega)(t) = \omega(s+t)$$

- Es gilt dann $x_t(\theta_s \omega) = \omega(s+t) = x_{s+t}(\omega)$, also:

$$x_{s+\bullet} = x_\bullet \circ \theta_s$$

$\Longrightarrow$ Für $F \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)})$: $\{x_{s+\bullet} \in F\} = \theta_s^{-1}\{x_\bullet \in F\}$.

- Wenn F durch ganz $\mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)})$ läuft, dann durchläuft $\{x_\bullet \in F\}$ ganz $\mathfrak{B}^d$.

- Wir definieren die Shift-Operatoren $\theta_s : C^d \to C^d$ durch

$$(\theta_s \omega)(t) = \omega(s+t)$$

- Es gilt dann $x_t(\theta_s \omega) = \omega(s+t) = x_{s+t}(\omega)$, also:

$$x_{s+\bullet} = x_\bullet \circ \theta_s$$

$\Longrightarrow$ Für $F \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)})$: $\{x_{s+\bullet} \in F\} = \theta_s^{-1} \{x_\bullet \in F\}$.

- Wenn F durch ganz $\mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)})$ läuft, dann durchläuft $\{x_\bullet \in F\}$ ganz $\mathfrak{B}^d$.
- Damit können wir die Bedingung

$$P^y(x_{s+\bullet} \in F \,|\, \mathfrak{F}_s) = P^{x_s}(x_\bullet \in F), \quad P^y\text{-f.a. } \omega \quad (F \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}))$$

ersetzen durch:

$$P^y(\theta_s^{-1} A \,|\, \mathfrak{B}_s^d)(\omega) = P^{\omega(s)}(A), \quad P^y\text{-f.a. } \omega \quad (A \in \mathfrak{B}^d)$$

Dies ermöglicht eine neue Formulierung der Markoveigenschaft für den kanonischen Prozess:

Dies ermöglicht eine neue Formulierung der Markoveigenschaft für den kanonischen Prozess:

Lemma

Eine Familie $(P^y; y \in \mathbb{R}^d)$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(C^d, \mathfrak{B}^d)$ hat die Markoveigenschaft, wenn gilt:

(a) für jedes $A \in \mathfrak{B}^d$ ist die Abbildung $y \mapsto P^y(A)$ universell messbar;

(b) $P^y(x_0 = y) = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$;

(c) für jedes $y \in \mathbb{R}^d$,$A \in \mathfrak{B}^d$ und $s \geq 0$ gilt:

$$P^y(\theta_s^{-1} A | \mathfrak{B}_s^d)(\omega) = P^{\omega(s)}(A), \quad P^y\text{-f.a. } \omega.$$

- Die Bedingung

$$P^y(x_{s+\bullet} \in F \,|\, \mathfrak{B}_s^d) = P^{x_s}(x_\bullet \in F), \quad P^y\text{-a.s. für alle } F \in \mathfrak{B}^d$$

kann man so interpretieren, dass der Prozess x „zu jedem festen Zeitpunkt neu startet".

- Die Bedingung

$$P^y(x_{s+\bullet} \in F | \mathfrak{B}_s^d) = P^{x_s}(x_\bullet \in F), \quad P^y\text{-a.s. für alle } F \in \mathfrak{B}^d$$

  kann man so interpretieren, dass der Prozess x „zu jedem festen Zeitpunkt neu startet“.
- Wenn dieses „Neustarten“ auch nach Stoppzeiten stattfindet, dann sprechen wir von der starken Markoveigenschaft.

Definition

Eine Familie $(P^y; y \in \mathbb{R}^d)$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(C^d, \mathfrak{B}^d)$ hat die starke Markoveigenschaft, wenn gilt:

(a) für jedes $A \in \mathfrak{B}^d$ ist die Abbildung $y \mapsto P^y(A)$ universell messbar;

(b) $P^y(x_0 = y) = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$;

(c) für jedes $y \in \mathbb{R}^d$,$A \in \mathfrak{B}^d$ und jede $(\mathfrak{B}^d_t)$-Stoppzeit S gilt:

$$P^y(\theta_S^{-1}A|\mathfrak{B}^d_S)(\omega) = P^{\omega(S)}(A), \quad P^y\text{-f.a. } \omega \text{ auf } \{S < \infty\}.$$

Definition

Eine Familie $(P^y; y \in \mathbb{R}^d)$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(C^d, \mathfrak{B}^d)$ hat die starke Markoveigenschaft, wenn gilt:

(a) für jedes $A \in \mathfrak{B}^d$ ist die Abbildung $y \mapsto P^y(A)$ universell messbar;

(b) $P^y(x_0 = y) = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$;

(c) für jedes $y \in \mathbb{R}^d$,$A \in \mathfrak{B}^d$ und jede $(\mathfrak{B}^d_t)$-Stoppzeit S gilt:

$$P^y(\theta_S^{-1} A | \mathfrak{B}^d_S)(\omega) = P^{\omega(S)}(A), \quad P^y\text{-f.a. } \omega \text{ auf } \{S < \infty\}.$$

- Zum Nachweis der starken Markoveigenschaft genügt es, beschränkte Stoppzeiten zu betrachten.

Motivation

- Es seien b_i, σ_{ij}; $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq r$ progressiv messbare Funktionale von $[0, \infty) \times C^d$ nach $\mathbb{R}$.

Motivation

- Es seien b_i, σ_{ij}; $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq r$ progressiv messbare Funktionale von $[0, \infty) \times C^d$ nach $\mathbb{R}$.
- Angenommen $(X, B), (\Omega, \mathfrak{F}, P), (\mathfrak{F}_t)$ ist eine schwache Lösung der stochastischen Differentialgleichung $dX_t = b(t, X)dt + \sigma(t, X)dB_t$.

Motivation

- Es seien b_i, σ_{ij}; $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq r$ progressiv messbare Funktionale von $[0, \infty) \times C^d$ nach $\mathbb{R}$.
- Angenommen $(X, B), (\Omega, \mathfrak{F}, P), (\mathfrak{F}_t)$ ist eine schwache Lösung der stochastischen Differentialgleichung $dX_t = b(t, X)dt + \sigma(t, X)dB_t$.
- Eine Anwendung der Itô-Formel zeigt, dass für jede Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ der Prozess

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathscr{A} f(s, X) ds$$

ein lokales Martingale bzgl. $(\mathfrak{F}_t)$ ist, wobei

$$\mathscr{A}(t, \omega) = \frac{1}{2} a_{ij}(t, \omega) \partial_i \partial_j f(\omega(t)) + b_i(t, \omega) \partial_i f(\omega(t))$$

und $a = \sigma\sigma^T$.

- Diesen Prozess können wir auch darstellen Verknüpfung $M_t^f \circ X$ mit

$$M_t^f(\omega) = f(\omega(t)) - f(\omega(0)) - \int_0^t \mathscr{A}(s, \omega) ds.$$

- Diesen Prozess können wir auch darstellen Verknüpfung $M_t^f \circ X$ mit

$$M_t^f(\omega) = f(\omega(t)) - f(\omega(0)) - \int_0^t \mathscr{A}(s,\omega)ds.$$

- Es ist dann leicht zu sehen, dass M^f unter PX^{-1} ein lokales Martingal ist bezüglich der kanonischen Filtration $(\mathfrak{G}_t^d)$ auf $(C^d, \mathfrak{B}^d)$, die die üblichen Bedingungen erfüllt:

$$\mathfrak{G}_t^d = \bigcap_{s>t} \sigma(\mathfrak{B}_s^d \cup \mathcal{N}),$$

wobei $\mathcal{N}$ die Kollektion aller Teilmengen von C^d ist, die in einer PX^{-1}-Nullmenge enthalten sind.

Definition

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(C^d, \mathfrak{B}^d)$, unter dem für jedes $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ der Prozess $(M_t^f, \mathfrak{G}_t^d)$ ein stetiges, lokales Martingal ist, nennen wir eine Lösung des lokalen Martingalproblems für (a, b).

Diese Definition ist ein wenig unhandlich, da die Filtration $(\mathfrak{G}_t^d)$ von P abhängt. Außerdem ist der Umgang mit lokalen Martingalen schwieriger als mit Martingalen. Darum wollen wir das Problem vereinfachen.

Definition

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(C^d, \mathfrak{B}^d)$, unter dem für jedes $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ der Prozess $(M_t^f, \mathfrak{G}_t^d)$ ein stetiges, lokales Martingal ist, nennen wir eine Lösung des lokalen Martingalproblems für (a, b).

Diese Definition ist ein wenig unhandlich, da die Filtration $(\mathfrak{G}_t^d)$ von P abhängt. Außerdem ist der Umgang mit lokalen Martingalen schwieriger als mit Martingalen. Darum wollen wir das Problem vereinfachen.

Definition

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(C^d, \mathfrak{B}^d)$, unter dem für jedes $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ der Prozess $(M_t^f, \mathfrak{B}_t^d)$ ein stetiges Martingal ist, nennen wir eine Lösung des Martingalproblems für (a, b).

Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$ betrachten wir die folgenden drei Bedingungen:

(A) Es existiert eine schwache Lösung der stochastischen Differentialgleichung $dX_t = b(t, X)dt + \sigma(t, X)dB_t$ mit der Anfangsverteilung μ.

(B) Es existiert eine Lösung des *lokalen Martingalproblems* für (a, b) mit Anfangsverteilung μ.

(C) Es existiert eine Lösung des *Martingalproblems* für (a, b) mit Anfangsverteilung μ.

Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$ betrachten wir die folgenden drei Bedingungen:

(A) Es existiert eine schwache Lösung der stochastischen Differentialgleichung $dX_t = b(t, X)dt + \sigma(t, X)dB_t$ mit der Anfangsverteilung μ.

(B) Es existiert eine Lösung des *lokalen Martingalproblems* für (a, b) mit Anfangsverteilung μ.

(C) Es existiert eine Lösung des *Martingalproblems* für (a, b) mit Anfangsverteilung μ.

Satz

- (A) und (B) sind äquivalent und implizieren (C).
- Wenn die Koeffizienten b und σ die Form $b(t, c) = b(c(t))$, $\sigma(t, c) = \sigma(c(t))$ haben und darüber hinaus auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ beschränkt sind, dann ist auch (C) äquivalent zu (A).

BEWEIS

- Die Aquivalenz von (A) und (B) wurde schon gezeigt. Es seien nun b_i, σ_{ij}; $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq r$ Borel-messbare Abbildungen von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$, die auf kompakten Mengen beschränkt sind. Wir müssen zeigen, dass in dieser Situation das Martingalproblem (C) und das lokale Martingalproblem (B) äquivalent sind.

BEWEIS

- Die Aquivalenz von (A) und (B) wurde schon gezeigt. Es seien nun b_i, σ_{ij}; $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq r$ Borel-messbare Abbildungen von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$, die auf kompakten Mengen beschränkt sind. Wir müssen zeigen, dass in dieser Situation das Martingalproblem (C) und das lokale Martingalproblem (B) äquivalent sind.
- Dafür benötigen wir das folgende Lemma:

BEWEIS

- Die Aquivalenz von (A) und (B) wurde schon gezeigt. Es seien nun b_i, σ_{ij}; $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq r$ Borel-messbare Abbildungen von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$, die auf kompakten Mengen beschränkt sind. Wir müssen zeigen, dass in dieser Situation das Martingalproblem (C) und das lokale Martingalproblem (B) äquivalent sind.
- Dafür benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma

P sei eine Lösung des lokalen Martingalproblems für (a, b) und $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$. Ist dann $(M_t^f, \mathfrak{B}_t^d)$ ein Martingal, so ist auch $(M_t^f, \mathfrak{G}_t^d)$ ein Martingal.

(C) impliziert (B).

(C) impliziert (B).

- Sei P eine Lösung des Martingalproblems für (a, b) und $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$.

(C) impliziert (B).

- Sei P eine Lösung des Martingalproblems für (a, b) und $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$.
- zu zeigen: unter P ist $(M_t^f, \mathfrak{G}_t^d)$ ein lokales Martingal.

(C) impliziert (B).

- Sei P eine Lösung des Martingalproblems für (a, b) und $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$.
- zu zeigen: unter P ist $(M_t^f, \mathfrak{G}_t^d)$ ein lokales Martingal.
- Definiere die Stoppzeiten

$$S_n = \inf\{t \geq 0 : \|x_t\| \geq n\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

und wähle eine Folge $(g_n) \subset C_0^2(\mathbb{R}^d)$ mit $g_n(y) = f(y)$ für $\|y\| \leq n$.

(C) impliziert (B).

- Sei P eine Lösung des Martingalproblems für (a, b) und $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$.
- zu zeigen: unter P ist $(M_t^f, \mathfrak{G}_t^d)$ ein lokales Martingal.
- Definiere die Stoppzeiten

$$S_n = \inf\{t \geq 0 : \|x_t\| \geq n\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

und wähle eine Folge $(g_n) \subset C_0^2(\mathbb{R}^d)$ mit $g_n(y) = f(y)$ für $\|y\| \leq n$.

$\Longrightarrow$ Für alle $n \in \mathbb{N}$: $(M_t^{g_n})$ ist ein Martingal bezüglich $(\mathfrak{G}_t^d)$.

(C) impliziert (B).

- Sei P eine Lösung des Martingalproblems für (a, b) und $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$.
- zu zeigen: unter P ist $(M_t^f, \mathfrak{G}_t^d)$ ein lokales Martingal.
- Definiere die Stoppzeiten

$$S_n = \inf \{t \geq 0 : \|x_t\| \geq n\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

und wähle eine Folge $(g_n) \subset C_0^2(\mathbb{R}^d)$ mit $g_n(y) = f(y)$ für $\|y\| \leq n$.

$\Longrightarrow$ Für alle $n \in \mathbb{N}$: $(M_t^{g_n})$ ist ein Martingal bezüglich $(\mathfrak{G}_t^d)$.

$\Longrightarrow$ Für alle $n \in \mathbb{N}$: $(M_{t\wedge S_n}^{g_n})$ ist ein Martingal bezüglich $(\mathfrak{G}_t^d)$.

(C) impliziert (B).

- Sei P eine Lösung des Martingalproblems für (a, b) und $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$.
- zu zeigen: unter P ist $(M_t^f, \mathfrak{G}_t^d)$ ein lokales Martingal.
- Definiere die Stoppzeiten

$$S_n = \inf\{t \geq 0 : \|x_t\| \geq n\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

und wähle eine Folge $(g_n) \subset C_0^2(\mathbb{R}^d)$ mit $g_n(y) = f(y)$ für $\|y\| \leq n$.

$\Longrightarrow$ Für alle $n \in \mathbb{N}$: $(M_t^{g_n})$ ist ein Martingal bezüglich $(\mathfrak{G}_t^d)$.

$\Longrightarrow$ Für alle $n \in \mathbb{N}$: $(M_{t\wedge S_n}^{g_n})$ ist ein Martingal bezüglich $(\mathfrak{G}_t^d)$.

- Mit $M_{t\wedge S_n}^f \equiv M_{t\wedge S_n}^{g_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt die Behauptung.

(B) impliziert (C).

(B) impliziert (C).

- Sei P eine Lösung des lokalen Martingalproblems für (a, b) und $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $(M_t^f, \mathfrak{B}_t^d)$ ist ein lokales Martingal.

(B) impliziert (C).

- Sei P eine Lösung des lokalen Martingalproblems für (a, b) und $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $(M_t^f, \mathfrak{B}_t^d)$ ist ein lokales Martingal.
- zu zeigen: $(M_t^f, \mathfrak{B}_t^d)$ ist ein Martingal.

(B) impliziert (C).

- Sei P eine Lösung des lokalen Martingalproblems für (a, b) und $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $(M_t^f, \mathfrak{B}_t^d)$ ist ein lokales Martingal.
- zu zeigen: $(M_t^f, \mathfrak{B}_t^d)$ ist ein Martingal.
- Wähle eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ so dass f außerhalb von K verschwindet.

(B) impliziert (C).

- Sei P eine Lösung des lokalen Martingalproblems für (a, b) und $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $(M_t^f, \mathfrak{B}_t^d)$ ist ein lokales Martingal.
- zu zeigen: $(M_t^f, \mathfrak{B}_t^d)$ ist ein Martingal.
- Wähle eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ so dass f außerhalb von K verschwindet.
- Sei $t > 0$. Da die f und die Koeffizienten a_{ij}, b_i auf K beschränkt sind, folgt für $s < t$:

(B) impliziert (C).

- Sei P eine Lösung des lokalen Martingalproblems für (a, b) und $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $(M_t^f, \mathfrak{B}_t^d)$ ist ein lokales Martingal.
- zu zeigen: $(M_t^f, \mathfrak{B}_t^d)$ ist ein Martingal.
- Wähle eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ so dass f außerhalb von K verschwindet.
- Sei $t > 0$. Da die f und die Koeffizienten a_{ij}, b_i auf K beschränkt sind, folgt für $s < t$:

$$\begin{aligned} |M_s^f(\omega)| &\leq |f(\omega(s))| + |f(\omega(0))| + \int_0^s |\mathscr{A}(u,\omega)| du \\ &\leq 2\|f\|_K + \int_0^s \|a_{ij} \cdot \partial_i\partial_j f\|_K + \|b_i \cdot \partial_i f\|_K du \\ &\leq 2\|f\|_K + t \cdot M \end{aligned}$$

für eine Konstante $M > 0$.

$\Longrightarrow$ für jedes $t \geq 0$ ist die Familie $\{M^f_\sigma : \sigma \text{ Stoppzeit mit } \sigma \leq t\}$ gleichgradig integrierbar. Daraus folgt die Behauptung.

Überblick

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen den Lösungen:

Überblick

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen den Lösungen:

- Wenn X eine schwache Lösung ist, dann löst die von X induzierte Verteilung das entsprechende lokale Martingalproblem.

Überblick

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen den Lösungen:

- Wenn X eine schwache Lösung ist, dann löst die von X induzierte Verteilung das entsprechende lokale Martingalproblem.
- Wenn P das lokale Martingalproblem löst, dann existiert eine schwache Lösung mit der Verteilung P

Überblick

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen den Lösungen:

- Wenn X eine schwache Lösung ist, dann löst die von X induzierte Verteilung das entsprechende lokale Martingalproblem.
- Wenn P das lokale Martingalproblem löst, dann existiert eine schwache Lösung mit der Verteilung P

oder genauer:

Überblick

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen den Lösungen:

- Wenn X eine schwache Lösung ist, dann löst die von X induzierte Verteilung das entsprechende lokale Martingalproblem.
- Wenn P das lokale Martingalproblem löst, dann existiert eine schwache Lösung mit der Verteilung P

oder genauer:

- Eine schwache Lösung mit Anfangswert y existiert genau dann, wenn es eine Lösung des lokalen Martingalproblems mit Anfangswert y gibt

Überblick

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen den Lösungen:

- Wenn X eine schwache Lösung ist, dann löst die von X induzierte Verteilung das entsprechende lokale Martingalproblem.
- Wenn P das lokale Martingalproblem löst, dann existiert eine schwache Lösung mit der Verteilung P

oder genauer:

- Eine schwache Lösung mit Anfangswert y existiert genau dann, wenn es eine Lösung des lokalen Martingalproblems mit Anfangswert y gibt
- Die Verteilung einer schwachen Lösung mit Anfangswert y ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn höchstens eine Lösung des LMP mit Anfangswert y existiert.

Vorteile der Formulierung als Martingalproblem

Vorteile der Formulierung als Martingalproblem

Wir konzentrieren uns auf die Verteilungen auf dem polnischen Raum $(C^d, \mathfrak{B}^d)$ und haben dadurch Zugriff auf drei Techniken:

Vorteile der Formulierung als Martingalproblem

Wir konzentrieren uns auf die Verteilungen auf dem polnischen Raum $(C^d, \mathfrak{B}^d)$ und haben dadurch Zugriff auf drei Techniken:

- der Begriff der schwachen Konvergenz

Vorteile der Formulierung als Martingalproblem

Wir konzentrieren uns auf die Verteilungen auf dem polnischen Raum $(C^d, \mathfrak{B}^d)$ und haben dadurch Zugriff auf drei Techniken:

- der Begriff der schwachen Konvergenz
- die Theorie der regulären bedingten Verteilungen

Vorteile der Formulierung als Martingalproblem

Wir konzentrieren uns auf die Verteilungen auf dem polnischen Raum $(C^d, \mathfrak{B}^d)$ und haben dadurch Zugriff auf drei Techniken:

- der Begriff der schwachen Konvergenz
- die Theorie der regulären bedingten Verteilungen
- Lokalisierung

Die Markov-Eigenschaft

das Martingalproblem

die starke Markoveigenschaft schwacher Lösungen

zur Existenz von Lösungen

die starke Markoveigenschaft schwacher Lösungen

Satz

Wir betrachten die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t,$$

wobei die Koeffizienten $b_i, \sigma_{ij} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$; $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq r$ auf kompakten Mengen beschränkt sind. Wir nehmen an, dass für jedes $y \in \mathbb{R}^d$ genau eine Lösung P^y des Martingalproblems für (a, b) mit $P^y(x_0 = y) = 1$ existiert. Dann hat die Familie $(P^y; y \in \mathbb{R}^d)$ die starke Markoveigenschaft: für jede Stoppzeit T von $(\mathfrak{B}_t)$, $A \in \mathfrak{B}^d$ und $y \in \mathbb{R}^d$:

$$P^y(\theta_T^{-1}A|\mathfrak{B}_T)(\omega) = P^{\omega(T)}(A), \quad P^y\text{-f.s. auf } \{T < \infty\}$$

die starke Markoveigenschaft schwacher Lösungen

Satz

Wir betrachten die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t,$$

wobei die Koeffizienten $b_i, \sigma_{ij} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$; $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq r$ auf kompakten Mengen beschränkt sind. Wir nehmen an, dass für jedes $y \in \mathbb{R}^d$ genau eine Lösung P^y des Martingalproblems für (a, b) mit $P^y(x_0 = y) = 1$ existiert. Dann hat die Familie $(P^y; y \in \mathbb{R}^d)$ die starke Markoveigenschaft: für jede Stoppzeit T von $(\mathfrak{B}_t)$, $A \in \mathfrak{B}^d$ und $y \in \mathbb{R}^d$:

$$P^y(\theta_T^{-1}A|\mathfrak{B}_T)(\omega) = P^{\omega(T)}(A), \quad P^y\text{-f.s. auf } \{T < \infty\}$$

- Man könnte auch sagen: unter jedem P^y ist (x_t) ein zeithomogener starker Markovprozess.

ein Existenzkriterium

Satz

Wir betrachten die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t,$$

diesmal mit beschränkten Koeffizienten $b_i, \sigma_{ij} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Es sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ mit der Eigenschaft

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^{2m} \mu(dy) < \infty \quad \text{für ein } m > 1.$$

Dann existiert eine schwache Lösung mit der Anfangsverteilung μ.