

Handout

Begrifflichkeiten

rekurrent	Ein Zustand i ist genau dann rekurrent, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Zustand unendlich oft eintritt gleich 1 ist, d. h. $\mathbb{P}(X_n = i \text{ unendlich oft}) = 1$ Eine stochastische Matrix P heißt rekurrent, wenn jeder Zustand rekurrent ist.
irreduzibel	Eine stochastische Matrix P ist irreduzibel, wenn man von jedem Zustand aus in endlicher Zeit und mit positiver Wahrscheinlichkeit zu jedem anderen gelangen kann und umgekehrt. D.h. $\forall k, l \exists n : p_{kl}^{(n)} > 0$
aperiodisch	Ein Zustand i heißt aperiodisch, wenn die Wahrscheinlichkeit in diesem Punkt zu verbleiben positiv ist für fast alle n , d.h. $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : p_{ii}^{(n)} > 0$

Gliederung

- I. Stationäre Verteilungen
- II. Konvergenz ins Gleichgewicht

Wichtige Definitionen und Theoreme zu I.

1. Aufenthaltszeit:

$$\gamma_i^k := \mathbb{E}_k \sum_{n=0}^{T_k-1} 1_{\{X_n=0\}}$$

2. Aufenthaltszeit ist strikt positives, invariantes Maß.
3. P irreduzibel: Für jedes stationäre Maß λ mit $\lambda_k = 1$ gilt $\lambda \geq \gamma^k$, $\lambda = \gamma^k$ falls P rekurrent
4. Ist die mittlere Rückkehrzeit $m_i = \mathbb{E}_i(T_i) < +\infty$, so heißt i positiv rekurrent.
5. P irreduzibel:

- i*) jeder Zustand ist positiv rekurrent \Leftrightarrow
- ii*) ein Zustand ist positiv rekurrent \Leftrightarrow
- iii*) P hat stationäre Verteilung π mit $\pi_i = m_i^{-1}$

Wichtige Definitionen und Theoreme zu II.

1. Existiert ein aperiodischer Zustand, so gilt für beliebige k, l :

$$p_{kl}^{(n)} > 0 \text{ für fast alle } n$$

2. Hauptaussage: Konvergenz ins Gleichgewicht
Sei P irreduzibel, aperiodisch mit stationärer Verteilung π , dann gilt:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{P}(X_n = j) \rightarrow \pi_j & n \rightarrow \infty \quad \forall j \in I \\ p_{ij}^{(n)} \rightarrow \pi_j & n \rightarrow \infty \quad \forall i, j \in I \\ \lambda P^n \rightarrow \pi & n \rightarrow \infty \quad \text{für alle Verteilungen } \lambda \\ P^n \rightarrow (\pi)_{i \in I} & n \rightarrow \infty \end{array}$$