

# Stationäre Verteilungen & Konvergenz ins Gleichgewicht bei Markov-Ketten in diskreten Zustandsräumen

18. November 2010

stationäre Verteilungen

Konvergenz ins Gleichgewicht

Beispiele

stationäre Verteilungen

Konvergenz ins Gleichgewicht

Beispiele

Ziel des Abschnitts: Jede irreduzible, rekurrente stochastische Matrix hat eine positive, stationäre Verteilung.

Ziel des Abschnitts: Jede irreduzible, rekurrente stochastische Matrix hat eine positive, stationäre Verteilung.  
Offene Frage: Eindeutigkeit?

Ziel des Abschnitts: Jede irreduzible, rekurrente stochastische Matrix hat eine positive, stationäre Verteilung.

Offene Frage: Eindeutigkeit?

Existenz einer stationären Verteilung klar, da:

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h. es gibt Spaltenvektor zum EW 1

Ziel des Abschnitts: Jede irreduzible, rekurrente stochastische Matrix hat eine positive, stationäre Verteilung.

Offene Frage: Eindeutigkeit?

Existenz einer stationären Verteilung klar, da:

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h. es gibt Spaltenvektor zum EW 1  
und damit auch Zeilenvektor  $\pi$  zum EW 1, d.h.

Ziel des Abschnitts: Jede irreduzible, rekurrente stochastische Matrix hat eine positive, stationäre Verteilung.

Offene Frage: Eindeutigkeit?

Existenz einer stationären Verteilung klar, da:

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h. es gibt Spaltenvektor zum EW 1  
und damit auch Zeilenvektor  $\pi$  zum EW 1, d.h.

$$\exists \pi : \quad \pi P = \pi$$

## Theorem (Kriterium für stationäre Verteilung)

Sei  $I$  ein endlicher Zustandsraum und für ein  $i \in I$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall j \in I$$

Dann ist  $\pi = (\pi_j : j \in I)$  stationäre Verteilung

## Theorem (Kriterium für stationäre Verteilung)

Sei  $I$  ein endlicher Zustandsraum und für ein  $i \in I$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall j \in I$$

Dann ist  $\pi = (\pi_j : j \in I)$  stationäre Verteilung

$$\sum_{j \in I} \pi_j$$

## Theorem (Kriterium für stationäre Verteilung)

Sei  $I$  ein endlicher Zustandsraum und für ein  $i \in I$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall j \in I$$

Dann ist  $\pi = (\pi_j : j \in I)$  stationäre Verteilung

$$\sum_{j \in I} \pi_j = \sum_{j \in I} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$$

## Theorem (Kriterium für stationäre Verteilung)

Sei  $I$  ein endlicher Zustandsraum und für ein  $i \in I$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall j \in I$$

Dann ist  $\pi = (\pi_j : j \in I)$  stationäre Verteilung

$$\sum_{j \in I} \pi_j = \sum_{j \in I} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)}$$

## Theorem (Kriterium für stationäre Verteilung)

Sei  $I$  ein endlicher Zustandsraum und für ein  $i \in I$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall j \in I$$

Dann ist  $\pi = (\pi_j : j \in I)$  stationäre Verteilung

$$\sum_{j \in I} \pi_j = \sum_{j \in I} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1$$

d.h.  $\pi$  ist Verteilung mit

## Theorem (Kriterium für stationäre Verteilung)

Sei  $I$  ein endlicher Zustandsraum und für ein  $i \in I$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall j \in I$$

Dann ist  $\pi = (\pi_j : j \in I)$  stationäre Verteilung

$$\sum_{j \in I} \pi_j = \sum_{j \in I} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1$$

d.h.  $\pi$  ist Verteilung mit

$$\sum_{k \in I} \pi_k p_{kj}$$

## Theorem (Kriterium für stationäre Verteilung)

Sei  $I$  ein endlicher Zustandsraum und für ein  $i \in I$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall j \in I$$

Dann ist  $\pi = (\pi_j : j \in I)$  stationäre Verteilung

$$\sum_{j \in I} \pi_j = \sum_{j \in I} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1$$

d.h.  $\pi$  ist Verteilung mit

$$\sum_{k \in I} \pi_k p_{kj} = \sum_{k \in I} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$$

## Theorem (Kriterium für stationäre Verteilung)

Sei  $I$  ein endlicher Zustandsraum und für ein  $i \in I$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall j \in I$$

Dann ist  $\pi = (\pi_j : j \in I)$  stationäre Verteilung

$$\sum_{j \in I} \pi_j = \sum_{j \in I} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1$$

d.h.  $\pi$  ist Verteilung mit

$$\sum_{k \in I} \pi_k p_{kj} = \sum_{k \in I} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$$

## Theorem (Kriterium für stationäre Verteilung)

Sei  $I$  ein endlicher Zustandsraum und für ein  $i \in I$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall j \in I$$

Dann ist  $\pi = (\pi_j : j \in I)$  stationäre Verteilung

$$\sum_{j \in I} \pi_j = \sum_{j \in I} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1$$

d.h.  $\pi$  ist Verteilung mit

$$\sum_{k \in I} \pi_k p_{kj} = \sum_{k \in I} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n+1)}$$

## Theorem (Kriterium für stationäre Verteilung)

Sei  $I$  ein endlicher Zustandsraum und für ein  $i \in I$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall j \in I$$

Dann ist  $\pi = (\pi_j : j \in I)$  stationäre Verteilung

$$\sum_{j \in I} \pi_j = \sum_{j \in I} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1$$

d.h.  $\pi$  ist Verteilung mit

$$\sum_{k \in I} \pi_k p_{kj} = \sum_{k \in I} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n+1)} = \pi_j$$

d.h.  $\pi$  ist stationär bzgl  $P$

## Anmerkung

Bei "Random Walks" (Symmetrischer Irrfahrt) gilt zwar  $p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$ , d.h. es wird irgendwann stationär, aber  $\sum \pi_j \neq 1$ , d.h.  $\pi$  ist keine Verteilung.

## Definition

### Definition (Aufenthaltszeit)

Die Aufenthaltszeit im Zustand  $i$ , bevor man den Zustand  $k$  erneut erreicht, ist definiert als

$$\gamma_i^k := \mathbb{E}_k \sum_{n=0}^{T_k-1} \mathbf{1}_{\{X_n=i\}}$$

## Theorem (Eigenschaften der Aufenthaltszeit)

*Sei  $P$  irreduzible und rekurrente stochastische Matrix, dann gilt:*

$$(i) \quad \gamma_k^k = 1$$

## Theorem (Eigenschaften der Aufenthaltszeit)

Sei  $P$  irreduzible und rekurrente stochastische Matrix, dann gilt:

- (i)  $\gamma_k^k = 1$
- (ii)  $\gamma^k = (\gamma_i^k : i \in I)$  erfüllt  $\gamma^k P = \gamma^k$

## Theorem (Eigenschaften der Aufenthaltszeit)

Sei  $P$  irreduzible und rekurrente stochastische Matrix, dann gilt:

- (i)  $\gamma_k^k = 1$
- (ii)  $\gamma^k = (\gamma_i^k : i \in I)$  erfüllt  $\gamma^k P = \gamma^k$
- (iii)  $0 < \gamma_i^k < +\infty \quad \forall i \in I$

## Theorem (Eigenschaften der Aufenthaltszeit)

Sei  $P$  irreduzible und rekurrente stochastische Matrix, dann gilt:

- (i)  $\gamma_k^k = 1$
- (ii)  $\gamma^k = (\gamma_i^k : i \in I)$  erfüllt  $\gamma^k P = \gamma^k$
- (iii)  $0 < \gamma_i^k < +\infty \quad \forall i \in I$

Anmerkung: (i) ✓

## Beweis von (ii)

Da  $P$  rekurrent, gilt  $T_k < +\infty$  und weiterhin  
 $\mathbb{P}_k(X_0 = X_{T_k} = k) = 1$  gilt

$$\gamma_j^k = \mathbb{E}_k \sum_{n=0}^{T_k-1} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}}$$

## Beweis von (ii)

Da  $P$  rekurrent, gilt  $T_k < +\infty$  und weiterhin  
 $\mathbb{P}_k(X_0 = X_{T_k} = k) = 1$  gilt

$$\begin{aligned}\gamma_j^k &= \mathbb{E}_k \sum_{n=0}^{T_k-1} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} &= \mathbb{E}_k \sum_{n=1}^{T_k} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}}\end{aligned}$$

## Beweis von (ii)

Da  $P$  rekurrent, gilt  $T_k < +\infty$  und weiterhin  
 $\mathbb{P}_k(X_0 = X_{T_k} = k) = 1$  gilt

$$\begin{aligned}\gamma_j^k &= \mathbb{E}_k \sum_{n=0}^{T_k-1} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} &= \mathbb{E}_k \sum_{n=1}^{T_k} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} \\ &= \mathbb{E}_k \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=j, n \leq T_k\}}\end{aligned}$$

## Beweis von (ii)

Da  $P$  rekurrent, gilt  $T_k < +\infty$  und weiterhin  
 $\mathbb{P}_k(X_0 = X_{T_k} = k) = 1$  gilt

$$\begin{aligned}\gamma_j^k &= \mathbb{E}_k \sum_{n=0}^{T_k-1} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} \\ &= \mathbb{E}_k \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=j, n \leq T_k\}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \mathbb{E}_k \sum_{n=1}^{T_k} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i \in I} \mathbb{P}_k(X_{n-1} = i, X_n = j, n \leq T_k)\end{aligned}$$

## Beweis von (ii)

Da  $P$  rekurrent, gilt  $T_k < +\infty$  und weiterhin  
 $\mathbb{P}_k(X_0 = X_{T_k} = k) = 1$  gilt

$$\begin{aligned}
 \gamma_j^k &= \mathbb{E}_k \sum_{n=0}^{T_k-1} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} & &= \mathbb{E}_k \sum_{n=1}^{T_k} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} \\
 &= \mathbb{E}_k \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=j, n \leq T_k\}} & &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i \in I} \mathbb{P}_k(X_{n-1} = i, X_n = j, n \leq T_k) \\
 &= \sum_{i \in I} p_{ij} \mathbb{E}_k \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_m=i, m \leq T_k-1\}}
 \end{aligned}$$

## Beweis von (ii)

Da  $P$  rekurrent, gilt  $T_k < +\infty$  und weiterhin  
 $\mathbb{P}_k(X_0 = X_{T_k} = k) = 1$  gilt

$$\begin{aligned}
 \gamma_j^k &= \mathbb{E}_k \sum_{n=0}^{T_k-1} 1_{\{X_n=j\}} & &= \mathbb{E}_k \sum_{n=1}^{T_k} 1_{\{X_n=j\}} \\
 &= \mathbb{E}_k \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n=j, n \leq T_k\}} & &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i \in I} \mathbb{P}_k(X_{n-1} = i, X_n = j, n \leq T_k) \\
 &= \sum_{i \in I} p_{ij} \mathbb{E}_k \sum_{m=0}^{\infty} 1_{\{X_m=i, m \leq T_k-1\}} & &= \sum_{i \in I} p_{ij} \mathbb{E}_k \sum_{m=0}^{T_k-1} 1_{\{X_m=i\}}
 \end{aligned}$$

## Beweis von (ii)

Da  $P$  rekurrent, gilt  $T_k < +\infty$  und weiterhin  
 $\mathbb{P}_k(X_0 = X_{T_k} = k) = 1$  gilt

$$\begin{aligned}
 \gamma_j^k &= \mathbb{E}_k \sum_{n=0}^{T_k-1} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} & &= \mathbb{E}_k \sum_{n=1}^{T_k} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} \\
 &= \mathbb{E}_k \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=j, n \leq T_k\}} & &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i \in I} \mathbb{P}_k(X_{n-1} = i, X_n = j, n \leq T_k) \\
 &= \sum_{i \in I} p_{ij} \mathbb{E}_k \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_m=i, m \leq T_k-1\}} & &= \sum_{i \in I} p_{ij} \mathbb{E}_k \sum_{m=0}^{T_k-1} \mathbf{1}_{\{X_m=i\}} \\
 &= \sum_{i \in I} \gamma_i^k p_{ij} \quad \text{d.h. } \gamma \text{ ist stationär} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

## Beweis von (iii)

Da  $P$  irreduzibel gilt:

$$\forall i, j \exists n, m \in \mathbb{N} : p_{ik}^{(n)} > 0, p_{kj}^{(m)} > 0$$

$$\gamma_j^k \stackrel{(ii)}{=} \sum_{i \in I} \gamma_i^k p_{ij}^{(m)} \geq \gamma_k^k p_{kj}^{(m)} > 0$$

## Beweis von (iii)

Da P irreduzibel gilt:

$$\forall i, j \exists n, m \in \mathbb{N} : p_{ik}^{(n)} > 0, p_{kj}^{(m)} > 0$$

$$\gamma_j^k \stackrel{(ii)}{=} \sum_{i \in I} \gamma_i^k p_{ij}^{(m)} \geq \gamma_k^k p_{kj}^{(m)} > 0$$

$$+\infty > \gamma_k^k \stackrel{(ii)}{=} \sum_{i \in I} \gamma_i^k p_{ik}^{(n)} \geq \gamma_j^k p_{jk}^{(n)}$$

## Beweis von (iii)

Da P irreduzibel gilt:

$$\forall i, j \exists n, m \in \mathbb{N} : p_{ik}^{(n)} > 0, p_{kj}^{(m)} > 0$$

$$\gamma_j^k \stackrel{(ii)}{=} \sum_{i \in I} \gamma_i^k p_{ij}^{(m)} \geq \gamma_k^k p_{kj}^{(m)} > 0$$

$$+\infty > \gamma_k^k \stackrel{(ii)}{=} \sum_{i \in I} \gamma_i^k p_{ik}^{(n)} \geq \gamma_j^k p_{jk}^{(n)}$$

$$\Rightarrow 0 < \gamma_j^k < +\infty \checkmark$$

## Lemma (ohne Beweis)

Sei  $P$  irreduzibel,  $\lambda$  stationäres Maß mit  $\lambda_k = 1$ , dann gilt

$$\lambda \geq \gamma^k$$

Ist  $P$  rekurrent, so gilt sogar echte Gleichheit.

## Definition (positiv rekurrent)

*Wir erinnern uns:*

$$\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ für unendlich viele } n) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}_i(T_i < +\infty) = 1$$

## Definition (positiv rekurrent)

*Wir erinnern uns:*

$$\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ für unendlich viele } n) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}_i(T_i < +\infty) = 1$$

*Ist zusätzlich die mittlere Rückkehrzeit*

$$m_i := \mathbb{E}_i(T_i)$$

*endlich, so heisst der Zustand  $i$  positiv rekurrent.*

## Definition (positiv rekurrent)

*Wir erinnern uns:*

$$\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ für unendlich viele } n) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}_i(T_i < +\infty) = 1$$

*Ist zusätzlich die mittlere Rückkehrzeit*

$$m_i := \mathbb{E}_i(T_i)$$

*endlich, so heisst der Zustand  $i$  positiv rekurrent.*

*Andernfalls nennen wir  $i$  nullrekurrent*

## Theorem

*Sei  $P$  irreduzibel, dann sind äquivalent:*

- (i) jeder Zustand ist positiv rekurrent*

## Theorem

*Sei  $P$  irreduzibel, dann sind äquivalent:*

- (i) jeder Zustand ist positiv rekurrent*
- (ii) ein Zustand  $i$  ist positiv rekurrent*

## Theorem

Sei  $P$  irreduzibel, dann sind äquivalent:

- (i) jeder Zustand ist positiv rekurrent
- (ii) ein Zustand  $i$  ist positiv rekurrent
- (iii)  $P$  hat eine stationäre Verteilung  $\pi$  mit  $\pi_i = m_i^{-1}$

## Theorem

Sei  $P$  irreduzibel, dann sind äquivalent:

- (i) jeder Zustand ist positiv rekurrent
- (ii) ein Zustand  $i$  ist positiv rekurrent
- (iii)  $P$  hat eine stationäre Verteilung  $\pi$  mit  $\pi_i = m_i^{-1}$

Anmerkung: (i)  $\Rightarrow$  (ii) ✓

## Beweis (ii) $\Rightarrow$ (iii)

Ist  $i$  positiv rekurrent, so insbesondere rekurrent.  
Dann ist  $\gamma^i$  invariantes Maß mit

$$\sum_{j \in I} \gamma_j^i$$

## Beweis (ii) $\Rightarrow$ (iii)

Ist  $i$  positiv rekurrent, so insbesondere rekurrent.  
Dann ist  $\gamma^i$  invariantes Maß mit

$$\sum_{j \in I} \gamma_j^i = \mathbb{E}_i(T_i)$$

## Beweis (ii) $\Rightarrow$ (iii)

Ist  $i$  positiv rekurrent, so insbesondere rekurrent.  
Dann ist  $\gamma^i$  invariantes Maß mit

$$\sum_{j \in I} \gamma_j^i = \mathbb{E}_i(T_i) = m_i < +\infty$$

## Beweis (ii) $\Rightarrow$ (iii)

Ist  $i$  positiv rekurrent, so insbesondere rekurrent.  
Dann ist  $\gamma^i$  invariantes Maß mit

$$\sum_{j \in I} \gamma_j^i = \mathbb{E}_i(T_i) = m_i < +\infty$$

Dann liefert

$$\pi_j = \frac{\gamma_j^i}{m_i}$$

das Gewünschte und  $\pi$  ist stationäre Verteilung.

Beweis (iii)  $\Rightarrow$  (i)

siehe Tafel

## Abschnittsfazit

Erinnerung: Ziel war es zu zeigen, dass jede irreduzible, positive rekurrente stochastische Matrix eine positive, stationäre Verteilung hat.

## Abschnittsfazit

Erinnerung: Ziel war es zu zeigen, dass jede irreduzible, positive rekurrente stochastische Matrix eine positive, stationäre Verteilung hat.

Das haben wir mit dem letzten Theorem gezeigt. ✓

stationäre Verteilungen

Konvergenz ins Gleichgewicht

Beispiele

## Worum geht es?

Ziel: Allgemeine Untersuchung vom Grenzverhalten für  $p_{ij}^{(n)}$ .

## Worum geht es?

Ziel: Allgemeine Untersuchung vom Grenzverhalten für  $p_{ij}^{(n)}$ .

Kann man Voraussagen machen über  $\lambda P^n$  für  $n \rightarrow \infty$ ?

Wissen bisher: Existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$  für einen Zustand  $i$ , so definiert uns das stationäre Verteilung.

## Worum geht es?

Ziel: Allgemeine Untersuchung vom Grenzverhalten für  $p_{ij}^{(n)}$ .

Kann man Voraussagen machen über  $\lambda P^n$  für  $n \rightarrow \infty$ ?

Wissen bisher: Existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$  für einen Zustand  $i$ , so definiert uns das stationäre Verteilung.

Aber was, wenn nicht?

## Worum geht es?

Ziel: Allgemeine Untersuchung vom Grenzverhalten für  $p_{ij}^{(n)}$ .

Kann man Voraussagen machen über  $\lambda P^n$  für  $n \rightarrow \infty$ ?

Wissen bisher: Existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$  für einen Zustand  $i$ , so definiert uns das stationäre Verteilung.

Aber was, wenn nicht?

Gegenbeispiel:  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

## Definition (aperiodisch)

*Ein Zustand  $i$  heisst aperiodisch, wenn gilt:*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0 \quad \forall n \geq n_0$$

## Definition (aperiodisch)

*Ein Zustand  $i$  heisst aperiodisch, wenn gilt:*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0 \quad \forall n \geq n_0$$

*$\Rightarrow$  Keine aperiodischen Zustände im Gegenbeispiel.*

## Definition (aperiodisch)

*Ein Zustand  $i$  heisst aperiodisch, wenn gilt:*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0 \quad \forall n \geq n_0$$

*$\Rightarrow$  Keine aperiodischen Zustände im Gegenbeispiel.*

*Existiert ein aperiodischer Zustand und  $P$  ist irreduzibel, so sind alle Zustände aperiodisch.*

## Definition (aperiodisch)

*Ein Zustand  $i$  heisst aperiodisch, wenn gilt:*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0 \quad \forall n \geq n_0$$

*$\Rightarrow$  Keine aperiodischen Zustände im Gegenbeispiel.*

*Existiert ein aperiodischer Zustand und  $P$  ist irreduzibel, so sind alle Zustände aperiodisch.*

*Es gilt sogar:  $p_{kl}^{(n)} > 0$  für fast alle  $n$  und beliebige  $k, l$ .*

## Theorem (Konvergenz ins Gleichgewicht)

Sei  $P$  irreduzibel, aperiodisch und habe die stationäre Verteilung  $\pi$   
Dann gilt für jede Verteilung  $\lambda$  mit  $(X_n)_{n \geq 0}$  ist Markov( $\lambda, P$ )

$$\mathbb{P}(X_n = j) \rightarrow \pi_j \quad n \rightarrow \infty \quad \forall j \in I$$

insbesondere gilt:

$$p_{ij}^{(n)} \rightarrow \pi_j \quad n \rightarrow \infty \quad \forall i, j \in I$$

stationäre Verteilungen

Konvergenz ins Gleichgewicht

Beispiele

Wissen bereits: Symmetrische Irrfahrt besitzt keine stationäre Verteilung

Wissen bereits: Symmetrische Irrfahrt besitzt keine stationäre Verteilung  
Betrachten daher Irrfahrt auf einem Kreis  
(sozusagen: Symmetrische Irrfahrt "mod  $n$ ")

Wissen bereits: Symmetrische Irrfahrt besitzt keine stationäre Verteilung

Betrachten daher Irrfahrt auf einem Kreis  
(sozusagen: Symmetrische Irrfahrt "mod  $n$ ")

Beispiel:  $n = 2$

Wissen bereits: Symmetrische Irrfahrt besitzt keine stationäre Verteilung

Betrachten daher Irrfahrt auf einem Kreis  
(sozusagen: Symmetrische Irrfahrt "mod  $n$ ")

Beispiel:  $n = 2$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$