# Wichtige Begriffe:

Q-Matrix:

(i) $0 \leq -q_{ii} < \infty \; \forall i$ (Kurzschreibweise: $-q_{ii} = q_i = q(i)$)

(ii) $q_{ij} \geq 0 \; \forall i \neq j$

(iii) $\sum\limits_{j \in J} q_{ij} = 0 \; \forall i$

Beispiel: $Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Sprungzeiten, Sprungkette, Verweildauer:

- $J_n$heißt Sprungzeit, wenn
  $J_0 = 0$ und $J_{n+1} = \inf\{t \geq J_n : X_t \neq X_{J_n}\}$
- Ein zeitdiskreter stochastischer Prozess heißt Sprungkette, wenn $(Y_n)_{n=0,1,\dots}$ mit $Y_n = X_{J_n}$
- $S_n$ heißt Verweildauer, wenn $S_n = \begin{cases} J_n - J_{n-1} & \text{wenn } J_{n-1} < \infty \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$

---

## 1 Sprungketten

**Definition:**

Die Sprungmatrix $\Pi = (\pi_{ij} : i, j \in I)$, zu einer Q-Matrix $Q$ ist def. durch:

$\pi_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i} & \text{falls } j \neq i \text{ und } q_i \neq 0 \\ 0 & \text{falls } j \neq i \text{ und } q_i = 0 \end{cases}$

$\pi_{ii} = \begin{cases} 0 & \text{falls } q_i \neq 0 \\ 1 & \text{falls } q_i = 0 \end{cases}$

Beispiel(zu obiger Q-Matrix):

$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

D.h. Wenn man sich in Zustand $i$ befindet, springt man entweder mit Wahrscheinlichkeit 1 weg zu einem anderen Punkt aus dem Zustandsraum oder man bleibt mit Wahrscheinlichkeit 1 in diesem Zustand.

**Definition:**

Ein minimaler rechtsstetiger Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ auf I, heißt Markovkette mit Startverteilung $\lambda$ und Generatormatrix $Q$, falls seine Sprungkette $(Y_n)_{n \geq 0}$ zeitdiskret Markov$(\lambda, \Pi)$ ist und für jedes $n \geq 1$ sind die Verweilzeiten $S_0, \dots, S_n$, bedingt auf $Y_0, \dots, Y_{n-1}$, unabh. und exponentialverteilt mit Parametern $q(Y_0), \dots, q(Y_{n-1})$.

1.Konstruktion

Sei $(Y_n)_{n \geq 0}$ zeitdiskret Markov$(\lambda, \Pi)$ und seien $T_1, T_2, \dots$ unabh. exp(1)-verteilte ZV, unabh. von $(Y_n)_{n \geq 0}$. Setze $S_n = T_n / q(Y_{n-1})$, $J_n = S_1 + \dots + S_n$ und

$$X_t = \begin{cases} Y_n & \text{falls } J_n \leq t < J_{n+1} \text{für ein } n \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow (X_t)_{t\geq 0}$ hat die gewünschten Eigenschaften.

2.Konstruktion
Wir beginnen mit einem Anfangszustand $X_0 = Y_0$ mit Startverteilung $\lambda$ und einer Matrix $(T_n^j : n \geq 1, j \in I)$ von unabhängigen exp(1)-verteilten Zufallsvariablen. Setzen induktiv, falls $Y_n = i$
$S_{n+1}^j = T_{n+1}^j / q_{ij}$, für $j \neq i$
$S_{n+1} = \inf_{j\neq i} S_{n+1}^j$,

$$Y_{n+1} = \begin{cases} j & \text{falls } S_{n+1}^j = S_{n+1} < \infty \\ i & \text{falls } S_{n+1} = \infty \end{cases}$$

Also sind bed. auf $Y_n = i$, die ZV $S_{n+1}^j$ unabh. und $exp(q_{ij})$-verteilt. Man kann zeigen([1], Theorem 2.3.3), dass bed. auf $Y_n = i$, $S_{n+1}$ exponentialverteilt ist zum Parameter $q_i = \sum_{j\neq i} q_{ij}$,
$Y_{n+1}$ die Verteilung $(\pi_{ij} : j \in I)$ hat und $S_{n+1}$ unabhängig von $S_0, \ldots, S_n$ ist.

# 2 Vorwärts-, Rückwärtsgleichungen

Motivation: Auch wenn die Definition von Markov Prozessen durch Sprung- und Verweilzeiten einen tiefen Einblick in den Prozess zulassen, bleiben einige Fragen offen. Z.B. Was ist $\mathbb{P}_i(X_t = j)$?
Wissen: Ist $Q$ Q-Matrix, dann ist $P(t) = e^{Qt}$ eine stochastische Matrix.

**Theorem 1:** Sei $Q$ eine Matrix auf einem endl. Raum I. $P(t) = e^{tQ}$. Dann hat $(P(t) : t \geq 0)$ die folgenden Eigenschaften:

(i) $P(s+t) = P(s)P(t)$ für alle s,t (Halbgruppeneigenschaft)

(ii) $(P(t) : t \geq 0)$ ist die einzige Lösung der Vorwärtsgleichung
$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)Q$, $P(0) = E$ wobei $E_{ij} = \delta_{ij}$ die Einheitsmatrix ist.

(iii) $(P(t) : t \geq 0)$ ist die einzige Lösung der Rückwärtsgleichung
$\frac{d}{dt}P(t) = QP(t)$, $P(0) = E$

**Theorem 2:** Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiger Prozess, mit Werten in I (endlich). Sei $Q$ Q-Matrix auf I mit Sprungmatrix $\Pi$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(a) bed. auf $X_0 = i$ ist die Sprungkette $(Y_n)_{n\geq 0}$ von $(X_t)_{t\geq 0}$ diskret Markov$(\delta_i, \Pi)$ und für jedes $n \geq 1$, sind die Verweilzeiten $S_1, \ldots, S_n$, bed. auf $Y_0, \ldots, Y_{n-1}$, unabhängig und exponentialverteilt zu den Parametern $q(Y_0), \ldots, q(Y_{n-1})$

(b) für alle $t, h \geq 0$ ist $X_{t+h}$, bedingt auf $X_t = i$, unabhängig von $(X_s; s \leq t)$ und für $h \downarrow 0$, gilt für alle j:
$\mathbb{P}(X_{t+h} = j | X_t = i) = \delta_{ij} + q_{ij}h + o(h)$

(c) Für alle $n = 0, 1, \ldots$, alle Zeiten $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{n+1}$ und alle Zustände $i_0, \ldots, i_{n+1}$
$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_0} = i_0, \ldots, X_{t_n} = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n)$ wobei $(p_{ij}(t) : i, j \in I, t \geq 0)$ die Lösung der Vorwärtsgleichung $P'(t) = P(t)Q$, $P(0) = E$.

Falls $X(t)_{t\geq 0}$ eine dieser Bedingungen erfüllt, dann nennen wir den Prozess $X(t)_{t\geq 0}$ Markovprozess mit Generatormatrix $Q$. (Kurz: Markov$(\lambda, Q)$), $\lambda$ ist die Startverteilung von $X_0$
Aus Theorem 1 wissen wir, dass für endl. Zustandsraum I, Vorwärts- und Rückwärtsgleichung dieselbe eindeutige Lösung haben. Somit könnten wir im Theorem 2 Vorwärts- durch Rückwärtsgleichung ersetzen.

Betrachten wir allerdings einen unendlichen Zustandsraum können wir dieses Argument nicht mehr benutzen. Daher benötigen wir folgendes:

**Theorem 3:** Sei $Q$ Q-Matrix, dann hat die Rückwärtsgleichung $P'(t) = QP(t)$, $P(0) = E$, eine minimale, nicht-negative Lösung $(P(t) : t \geq 0)$. Diese Lösung bildet eine Matrix-Halbgruppe: $P(s)P(t) = P(s+t)$

**Theorem 4:** Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein minimaler, rechtsstetiger Prozess mit Werten in I(nicht unbedingt endl.). Sei $Q$ eine Q-Matrix auf I mit Sprungmatrix $\Pi$ und der Halbgruppe $(P(t) : t \geq 0)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) bed. auf $X_0 = i$, ist die Sprungkette $(Y_n)_{n\geq 0}$ von $(X_t)_{t\geq 0}$ diskret-Markov$(\delta_i, \Pi)$, und für jedes $n \geq 0$ sind die Verweilzeiten $S_1, \ldots, S_n$, bed. auf $Y_0, \ldots, Y_{n-1}$ unabh. exponentialverteilte ZV mit Parameter $q(Y_0), \ldots, q(Y_{n-1})$

(b) für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$, alle Zeiten $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{n+1}$ und alle Zustände $i_0, \ldots, i_{n+1}$gilt: $\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_0} = i_0, \ldots, X_{t_n} = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n)$

Gleiche Sprech-, Kurzschreibweise wie beim obigen Theorem zu Charakterisierung von Markovketten.

**Theorem 5:** Die minimale Lösung $(P(t) : t \geq 0)$ der Rückwärtsgleichung ist auch eine minimale Lösung der Vorwärtsgleichung $P'(t) = P(t)Q$, $P(0) = E$

# Literatur

[1] J.R. Norris *Markov Chains*, Cambridge University Press, 1997

[2] E. Pardoux *Markov Prozesses and Applications*, John Wiley & Sons Ltd., 2008