

# Sprungketten & Vorwärts-, Rückwärtsgleichungen

Pascal Schütz

8. Dezember 2010

Wichtige Begriffe

Sprungketten

Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen

Wichtige Begriffe

Sprungketten

Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen

Q-Matrix:

- (i)  $0 \leq -q_{ii} < \infty \quad \forall i$  (Kurzschreibweise:  $-q_{ii} = q_i = q(i)$ )
- (ii)  $q_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j$
- (iii)  $\sum_{j \in J} q_{ij} = 0 \quad \forall i$

Beispiel:  $Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Q-Matrix:

- (i)  $0 \leq -q_{ii} < \infty \quad \forall i$  (Kurzschreibweise:  $-q_{ii} = q_i = q(i)$ )
- (ii)  $q_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j$
- (iii)  $\sum_{j \in J} q_{ij} = 0 \quad \forall i$

Beispiel:  $Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Sprungzeiten, Sprungkette, Verweildauer:

- ▶  $J_n$  heißt Sprungzeit, wenn  
 $J_0 = 0$  und  $J_{n+1} = \inf\{t \geq J_n : X_t \neq X_{J_n}\}$

Q-Matrix:

- (i)  $0 \leq -q_{ii} < \infty \quad \forall i$  (Kurzschreibweise:  $-q_{ii} = q_i = q(i)$ )
- (ii)  $q_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j$
- (iii)  $\sum_{j \in J} q_{ij} = 0 \quad \forall i$

Beispiel:  $Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Sprungzeiten, Sprungkette, Verweildauer:

- ▶  $J_n$  heißt Sprungzeit, wenn  
 $J_0 = 0$  und  $J_{n+1} = \inf\{t \geq J_n : X_t \neq X_{J_n}\}$
- ▶ Ein zeitdiskreter, stochastischer Prozess heißt Sprungkette, wenn  $(Y_n)_{n=0,1,\dots}$  mit  $Y_n = X_{J_n}$

Q-Matrix:

- (i)  $0 \leq -q_{ii} < \infty \quad \forall i$  (Kurzschreibweise:  $-q_{ii} = q_i = q(i)$ )
- (ii)  $q_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j$
- (iii)  $\sum_{j \in J} q_{ij} = 0 \quad \forall i$

Beispiel:  $Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Sprungzeiten, Sprungkette, Verweildauer:

- ▶  $J_n$  heißt Sprungzeit, wenn  
 $J_0 = 0$  und  $J_{n+1} = \inf\{t \geq J_n : X_t \neq X_{J_n}\}$
- ▶ Ein zeitdiskreter, stochastischer Prozess heißt Sprungkette, wenn  $(Y_n)_{n=0,1,\dots}$  mit  $Y_n = X_{J_n}$
- ▶  $S_n$  heißt Verweildauer, wenn  

$$S_n = \begin{cases} J_n - J_{n-1} & \text{wenn } J_{n-1} < \infty \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Wichtige Begriffe

Sprungketten

Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen

Ziel des Abschnitts: Beschreibung von stochastischen Prozessen mithilfe von Ihren Sprungketten und den zugehörigen Verweilzeiten.

## Definition (Sprungmatrix)

Die Sprungmatrix  $\Pi = (\pi_{ij} : i, j \in I)$ , zu einer  $Q$ -Matrix  $Q$  ist def. durch:

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i} & \text{falls } j \neq i \text{ und } q_i \neq 0 \\ 0 & \text{falls } j \neq i \text{ und } q_i = 0 \end{cases}$$

## Definition (Sprungmatrix)

Die Sprungmatrix  $\Pi = (\pi_{ij} : i, j \in I)$ , zu einer  $Q$ -Matrix  $Q$  ist def. durch:

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i} & \text{falls } j \neq i \text{ und } q_i \neq 0 \\ 0 & \text{falls } j \neq i \text{ und } q_i = 0 \end{cases}$$

$$\pi_{ii} = \begin{cases} 0 & \text{falls } q_i \neq 0 \\ 1 & \text{falls } q_i = 0 \end{cases}$$

## Definition (Sprungmatrix)

Die Sprungmatrix  $\Pi = (\pi_{ij} : i, j \in I)$ , zu einer  $Q$ -Matrix  $Q$  ist def. durch:

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i} & \text{falls } j \neq i \text{ und } q_i \neq 0 \\ 0 & \text{falls } j \neq i \text{ und } q_i = 0 \end{cases}$$

$$\pi_{ii} = \begin{cases} 0 & \text{falls } q_i \neq 0 \\ 1 & \text{falls } q_i = 0 \end{cases}$$

Beispiel(zu obiger  $Q$ -Matrix):

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Was sagt eine Sprungmatrix aus?

Was sagt eine Sprungmatrix aus?

Wenn man sich in einem Zustand  $i$  befindet,

Was sagt eine Sprungmatrix aus?

Wenn man sich in einem Zustand  $i$  befindet, springt man entweder mit Wahrscheinlichkeit 1 weg zu einem anderen Punkt aus dem Zustandsraum

Was sagt eine Sprungmatrix aus?

Wenn man sich in einem Zustand  $i$  befindet, springt man entweder mit Wahrscheinlichkeit 1 weg zu einem anderen Punkt aus dem Zustandsraum oder man bleibt mit Wahrscheinlichkeit 1 in diesem Zustand.

# Definition einer zeitstetigen Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten.

Ein minimaler, rechtsstetiger Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$  auf  $I$  ist eine Markovkette mit Startverteilung  $\lambda$  und Generatormatrix  $Q$ ,

## Definition einer zeitstetigen Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten.

Ein minimaler, rechtsstetiger Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$  auf  $I$  ist eine Markovkette mit Startverteilung  $\lambda$  und Generatormatrix  $Q$ , falls seine Sprungkette  $(Y_n)_{n \geq 0}$  zeitdiskret Markov( $\lambda, \Pi$ ) ist

# Definition einer zeitstetigen Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten.

Ein minimaler, rechtsstetiger Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$  auf  $I$  ist eine Markovkette mit Startverteilung  $\lambda$  und Generatormatrix  $Q$ , falls seine Sprungkette  $(Y_n)_{n \geq 0}$  zeitdiskret Markov $(\lambda, \Pi)$  ist und für jedes  $n \geq 1$  sind die Verweilzeiten  $S_0, \dots, S_n$ , bedingt auf  $Y_0, \dots, Y_{n-1}$ ,

## Definition einer zeitstetigen Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten.

Ein minimaler, rechtsstetiger Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$  auf  $I$  ist eine Markovkette mit Startverteilung  $\lambda$  und Generatormatrix  $Q$ , falls seine Sprungkette  $(Y_n)_{n \geq 0}$  zeitdiskret Markov( $\lambda, \Pi$ ) ist und für jedes  $n \geq 1$  sind die Verweilzeiten  $S_0, \dots, S_n$ , bedingt auf  $Y_0, \dots, Y_{n-1}$ , unabh. und exponentialverteilt mit Parametern  $q(Y_0), \dots, q(Y_{n-1})$ .

# Konstruktion einer Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten (1)

Sei  $(Y_n)_{n \geq 0}$  zeitdiskret Markov( $\lambda, \Pi$ )

# Konstruktion einer Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten (1)

Sei  $(Y_n)_{n \geq 0}$  zeitdiskret Markov  $(\lambda, \Pi)$  und seien  $T_1, T_2, \dots$  unabh.,  $\exp(1)$ -verteilte ZV, unabh. von  $(Y_n)_{n \geq 0}$ .

# Konstruktion einer Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten (1)

Sei  $(Y_n)_{n \geq 0}$  zeitdiskret Markov  $(\lambda, \Pi)$  und seien  $T_1, T_2, \dots$  unabh.,  $\exp(1)$ -verteilte ZV, unabh. von  $(Y_n)_{n \geq 0}$ .

Setze  $S_n = T_n/q(Y_{n-1})$ ,  $J_n = S_1 + \dots + S_n$  und

# Konstruktion einer Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten (1)

Sei  $(Y_n)_{n \geq 0}$  zeitdiskret Markov  $(\lambda, \Pi)$  und seien  $T_1, T_2, \dots$  unabh.,  $\exp(1)$ -verteilte ZV, unabh. von  $(Y_n)_{n \geq 0}$ .

Setze  $S_n = T_n/q(Y_{n-1})$ ,  $J_n = S_1 + \dots + S_n$  und

$$X_t = \begin{cases} Y_n & \text{falls } J_n \leq t < J_{n+1} \text{ für ein } n \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

# Konstruktion einer Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten (1)

Sei  $(Y_n)_{n \geq 0}$  zeitdiskret Markov  $(\lambda, \Pi)$  und seien  $T_1, T_2, \dots$  unabh.,  $\exp(1)$ -verteilte ZV, unabh. von  $(Y_n)_{n \geq 0}$ .

Setze  $S_n = T_n/q(Y_{n-1})$ ,  $J_n = S_1 + \dots + S_n$  und

$$X_t = \begin{cases} Y_n & \text{falls } J_n \leq t < J_{n+1} \text{ für ein } n \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow (X_t)_{t \geq 0}$  hat die gewünschten Eigenschaften.

# Konstruktion einer Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten (2)

Sei  $Y_n$  diskrete Sprungkette, dann beginnen wir mit  $X_0 = Y_0$  mit der Startverteilung  $\lambda$ .

## Konstruktion einer Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten (2)

Sei  $Y_n$  diskrete Sprungkette, dann beginnen wir mit  $X_0 = Y_0$  mit der Startverteilung  $\lambda$ .

Seien  $(T_n^j : n \geq 1, j \in I)$  Familie von unabhängigen  $\exp(1)$ -verteilten Zufallsvariablen

## Konstruktion einer Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten (2)

Sei  $Y_n$  diskrete Sprungkette, dann beginnen wir mit  $X_0 = Y_0$  mit der Startverteilung  $\lambda$ .

Seien  $(T_n^j : n \geq 1, j \in I)$  Familie von unabhängigen  $\exp(1)$ -verteilten Zufallsvariablen

falls  $Y_n = i$ ; setze  $S_{n+1}^j = T_{n+1}^j / q_{ij}$  für  $j \neq i$

## Konstruktion einer Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten (2)

Sei  $Y_n$  diskrete Sprungkette, dann beginnen wir mit  $X_0 = Y_0$  mit der Startverteilung  $\lambda$ .

Seien  $(T_n^j : n \geq 1, j \in I)$  Familie von unabhängigen  $\exp(1)$ -verteilten Zufallsvariablen

falls  $Y_n = i$ ; setze  $S_{n+1}^j = T_{n+1}^j / q_{ij}$  für  $j \neq i$

$$S_{n+1} = \inf_{j \neq i} S_{n+1}^j$$

## Konstruktion einer Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten (2)

$$Y_{n+1} = \begin{cases} j & \text{falls } S_{n+1}^j = S_{n+1} < \infty \\ i & \text{falls } S_{n+1} = \infty \end{cases}$$

## Konstruktion einer Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten (2)

$$Y_{n+1} = \begin{cases} j & \text{falls } S_{n+1}^j = S_{n+1} < \infty \\ i & \text{falls } S_{n+1} = \infty \end{cases}$$

Daher gilt, bedingt auf  $Y_n = i$ , sind die ZV  $S_{n+1}^j$ ,  $j \in I$  unabh. und  $\exp(q_{ij})$ -verteilt.

## Konstruktion einer Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten (2)

$$Y_{n+1} = \begin{cases} j & \text{falls } S_{n+1}^j = S_{n+1} < \infty \\ i & \text{falls } S_{n+1} = \infty \end{cases}$$

Daher gilt, bedingt auf  $Y_n = i$ , sind die ZV  $S_{n+1}^j, j \in I$  unabh. und  $\exp(q_{ij})$ -verteilt. Man kann zeigen, dass bedingt auf  $Y_n = i$ ,

## Konstruktion einer Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten (2)

$$Y_{n+1} = \begin{cases} j & \text{falls } S_{n+1}^j = S_{n+1} < \infty \\ i & \text{falls } S_{n+1} = \infty \end{cases}$$

Daher gilt, bedingt auf  $Y_n = i$ , sind die ZV  $S_{n+1}^j$ ,  $j \in I$  unabh. und  $\exp(q_{ij})$ -verteilt. Man kann zeigen, dass bedingt auf  $Y_n = i$ ,  $S_{n+1}$  exponentialverteilt ist zum Parameter  $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ ,

## Konstruktion einer Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten (2)

$$Y_{n+1} = \begin{cases} j & \text{falls } S_{n+1}^j = S_{n+1} < \infty \\ i & \text{falls } S_{n+1} = \infty \end{cases}$$

Daher gilt, bedingt auf  $Y_n = i$ , sind die ZV  $S_{n+1}^j$ ,  $j \in I$  unabh. und  $\exp(q_{ij})$ -verteilt. Man kann zeigen, dass bedingt auf  $Y_n = i$ ,  $S_{n+1}$  exponentialverteilt ist zum Parameter  $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ ,

$Y_{n+1}$  die Verteilung  $(\pi_{ij} : j \in I)$  hat und

## Konstruktion einer Markovkette mithilfe von Sprung- und Verweilzeiten (2)

$$Y_{n+1} = \begin{cases} j & \text{falls } S_{n+1}^j = S_{n+1} < \infty \\ i & \text{falls } S_{n+1} = \infty \end{cases}$$

Daher gilt, bedingt auf  $Y_n = i$ , sind die ZV  $S_{n+1}^j$ ,  $j \in I$  unabh. und  $\exp(q_{ij})$ -verteilt. Man kann zeigen, dass bedingt auf  $Y_n = i$ ,  $S_{n+1}$  exponentialverteilt ist zum Parameter  $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ ,

$Y_{n+1}$  die Verteilung  $(\pi_{ij} : j \in I)$  hat und  $S_{n+1}$  unabhängig von  $S_0, \dots, S_n$  ist.

Wichtige Begriffe

Sprungketten

Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen

Motivation: Was ist  $\mathbb{P}_i(X_t = j)$ ?

Motivation: Was ist  $\mathbb{P}_i(X_t = j)$ ?

Wofür benötigt man diese Q-Matrix?

Motivation: Was ist  $\mathbb{P}_i(X_t = j)$ ?

Wofür benötigt man diese Q-Matrix?

Wir brauchen also weitere Theorie um diese Fragen zu klären!

## Theorem

Sei  $Q$  eine Matrix auf einem endlichen Zustandsraum  $I$ .

$P(t) = e^{tQ}$ . Dann hat  $(P(t) : t \geq 0)$  die folgenden Eigenschaften:

## Theorem

Sei  $Q$  eine Matrix auf einem endlichen Zustandsraum  $I$ .

$P(t) = e^{tQ}$ . Dann hat  $(P(t) : t \geq 0)$  die folgenden Eigenschaften:

- (i)  $P(s + t) = P(s)P(t)$  für alle  $s, t$  (Halbgruppeneigenschaft)

## Theorem

Sei  $Q$  eine Matrix auf einem endlichen Zustandsraum  $I$ .

$P(t) = e^{tQ}$ . Dann hat  $(P(t) : t \geq 0)$  die folgenden Eigenschaften:

- (i)  $P(s + t) = P(s)P(t)$  für alle  $s, t$  (Halbgruppeneigenschaft)
- (ii)  $(P(t) : t \geq 0)$  ist die einzige Lösung der Vorwärtsgleichung

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)Q, \quad P(0) = E, \quad E_{ij} = \delta_{ij}$$

## Theorem

Sei  $Q$  eine Matrix auf einem endlichen Zustandsraum  $I$ .

$P(t) = e^{tQ}$ . Dann hat  $(P(t) : t \geq 0)$  die folgenden Eigenschaften:

- (i)  $P(s + t) = P(s)P(t)$  für alle  $s, t$  (Halbgruppeneigenschaft)
- (ii)  $(P(t) : t \geq 0)$  ist die einzige Lösung der Vorwärtsgleichung

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)Q, \quad P(0) = E, \quad E_{ij} = \delta_{ij}$$

- (iii)  $(P(t) : t \geq 0)$  ist die einzige Lösung der Rückwärtsgleichung

$$\frac{d}{dt}P(t) = QP(t), \quad P(0) = E$$

Warum heißen die Gleichungen Vorwärts-, bzw.  
Rückwärtsgleichungen?

## Theorem

*Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein rechtsstetiger Prozess, mit Werten in  $I$  (endlich).  
Sei  $Q$  eine  $Q$ -Matrix auf  $I$  mit Sprungmatrix  $\Pi$ . Dann sind die  
folgenden Bedingungen äquivalent:*

## Theorem

Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein rechtsstetiger Prozess, mit Werten in  $I$  (endlich).  
Sei  $Q$  eine  $Q$ -Matrix auf  $I$  mit Sprungmatrix  $\Pi$ . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) bed. auf  $X_0 = i$  ist die Sprungkette  $(Y_n)_{n \geq 0}$  von  $(X_t)_{t \geq 0}$  diskret Markov  $(\delta_i, \Pi)$  und für jedes  $n \geq 1$ , sind die Verweilzeiten  $S_1, \dots, S_n$ , bed. auf  $Y_0, \dots, Y_{n-1}$ , unabhängig und exponentialverteilt zu den Parametern  $q(Y_0), \dots, q(Y_{n-1})$

## Theorem

Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein rechtsstetiger Prozess, mit Werten in  $I$  (endlich).  
Sei  $Q$  eine  $Q$ -Matrix auf  $I$  mit Sprungmatrix  $\Pi$ . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) bed. auf  $X_0 = i$  ist die Sprungkette  $(Y_n)_{n \geq 0}$  von  $(X_t)_{t \geq 0}$  diskret Markov  $(\delta_i, \Pi)$  und für jedes  $n \geq 1$ , sind die Verweilzeiten  $S_1, \dots, S_n$ , bed. auf  $Y_0, \dots, Y_{n-1}$ , unabhängig und exponentialverteilt zu den Parametern  $q(Y_0), \dots, q(Y_{n-1})$
- (b) für alle  $t, h \geq 0$  ist  $X_{t+h}$ , bedingt auf  $X_t = i$ , unabhängig von  $(X_s; s \leq t)$  und für  $h \downarrow 0$  gleichmäßig in  $t$ , gilt für alle  $j$ :
- $$\mathbb{P}(X_{t+h} = j | X_t = i) = \delta_{ij} + q_{ij}h + o(h)$$

## Theorem

Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein rechtsstetiger Prozess, mit Werten in  $I$  (endlich).  
Sei  $Q$  eine  $Q$ -Matrix auf  $I$  mit Sprungmatrix  $\Pi$ . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) bed. auf  $X_0 = i$  ist die Sprungkette  $(Y_n)_{n \geq 0}$  von  $(X_t)_{t \geq 0}$  diskret Markov  $(\delta_i, \Pi)$  und für jedes  $n \geq 1$ , sind die Verweilzeiten  $S_1, \dots, S_n$ , bed. auf  $Y_0, \dots, Y_{n-1}$ , unabhängig und exponentialverteilt zu den Parametern  $q(Y_0), \dots, q(Y_{n-1})$
- (b) für alle  $t, h \geq 0$  ist  $X_{t+h}$ , bedingt auf  $X_t = i$ , unabhängig von  $(X_s; s \leq t)$  und für  $h \downarrow 0$  gleichmäßig in  $t$ , gilt für alle  $j$ :  

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = j | X_t = i) = \delta_{ij} + q_{ij}h + o(h)$$
- (c) Für alle  $n = 0, 1, \dots$ , alle Zeiten  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1}$  und alle Zustände  $i_0, \dots, i_{n+1}$   

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_0} = i_0, \dots, X_{t_n} = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n)$$
wobei  $(p_{ij}(t) : i, j \in I, t \geq 0)$  die Lösung der Vorwärtsgleichung  $P'(t) = P(t)Q$ ,  $P(0) = E$  ist.

Achtung!!!

Achtung!!!

Für unendliche Zustandsräume funktioniert diese Charakterisierung nicht mehr!

## Theorem

Sei  $Q$   $Q$ -Matrix, dann hat die Rückwärtsgleichung  $P'(t) = QP(t)$ ,  $P(0) = E$ , eine minimale, nicht-negative Lösung ( $P(t) : t \geq 0$ ).

Diese Lösung bildet eine Matrix-Halbgruppe:

$$P(s)P(t) = P(s + t) \quad \forall s, t \geq 0$$

## Theorem

Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein minimaler, rechtsstetiger Prozess mit Werten in  $I$ .  
Sei  $Q$  eine  $Q$ -Matrix auf  $I$  mit Sprungmatrix  $\Pi$  und der Halbgruppe  $(P(t) : t \geq 0)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

## Theorem

Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein minimaler, rechtsstetiger Prozess mit Werten in  $I$ .  
Sei  $Q$  eine  $Q$ -Matrix auf  $I$  mit Sprungmatrix  $\Pi$  und der Halbgruppe  $(P(t) : t \geq 0)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) bed. auf  $X_0 = i$ , ist die Sprungskette  $(Y_n)_{n \geq 0}$  von  $(X_t)_{t \geq 0}$  diskret-Markov  $(\delta_i, \Pi)$ , und für jedes  $n \geq 0$  sind die Verweilzeiten  $S_1, \dots, S_n$ , bed. auf  $Y_0, \dots, Y_{n-1}$  unabh. exponentialverteilte ZV mit Parameter  $q(Y_0), \dots, q(Y_{n-1})$

## Theorem

Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein minimaler, rechtsstetiger Prozess mit Werten in  $I$ .  
Sei  $Q$  eine  $Q$ -Matrix auf  $I$  mit Sprungmatrix  $\Pi$  und der Halbgruppe  $(P(t) : t \geq 0)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) bed. auf  $X_0 = i$ , ist die Sprungkette  $(Y_n)_{n \geq 0}$  von  $(X_t)_{t \geq 0}$  diskret-Markov  $(\delta_i, \Pi)$ , und für jedes  $n \geq 0$  sind die Verweilzeiten  $S_1, \dots, S_n$ , bed. auf  $Y_0, \dots, Y_{n-1}$  unabh. exponentialverteilte ZV mit Parameter  $q(Y_0), \dots, q(Y_{n-1})$
- (b) für alle  $n = 0, 1, 2, \dots$ , alle Zeiten  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1}$  und alle Zustände  $i_0, \dots, i_{n+1}$  gilt:

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_0} = i_0, \dots, X_{t_n} = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n)$$

Warum reden wir, im Falle von  $I$  ist unendlicher Zustandsraum, nur noch von Rückwärtsgleichungen?

Vielen Dank!