Schwache Lösungen von SDEs und das lokale Martingal Problem

Christin Strampe

Definition 1 *(Funktionale SDE)*
Für progessiv-messbare Funktionale $b_i(t,x), \sigma_{ij}(t,x)$ $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq r$ *von* $\mathbb{R}_+ \times C[0,\infty)^d$ *nach* $\mathbb{R}$ *ist die funktionale stochastische Differentialgleichung gegeben durch*

$$dX_t = b(t,X)dt + \sigma(t,X)dW_t \tag{1}$$

mit $W = \{W_t; 0 \leq t < \infty\}$ *einer r-dimensionale Brownsche Bewegung.*

Definition 2 *(Schwache Lösung einer funktionalen SDE)*
Eine schwache Lösung der funktionalen SDE (1) ist das Tripel $(X,W),(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}),\{\mathcal{F}_t\}$*, falls*

- $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *ist ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $\{\mathcal{F}_t\}$ *ist eine Filtration von* $\mathcal{F}$*, die die üblichen Bedingungen ("usual conditions") erfüllt.*
- X *ist ein stetiger, an* $\{\mathcal{F}_t\}$*-adaptierter,* $\mathbb{R}^d$*-wertiger Prozess und* W *eine* r*-dimensionale Brownsche Bewegung bzgl* $\{\mathcal{F}_t\}$
- $\mathbb{P}\left(\int_0^t |b_i(s,X)|ds + \int_0^t \sigma_{ij}^2(s,X)ds < \infty\right) = 1$ *für* $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq r,$ $0 \leq t < \infty$
- *und* X *erfüllt* $\mathbb{P}$*-f.s die Integralgleichung*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X)ds + \int_0^t \sigma(s,X)dW_s \quad 0 \leq t < \infty$$

Definition 3 *(Lösung des lokalen Martingalproblems)*
Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ *auf* $(C[0,\infty)^d, \mathcal{B}(C[0,\infty)^d))$ *unter dem*

$$M_t^f = f(y(t)) - f(y(0)) - \int_0^t (\mathcal{A}'_s f)(y)ds \quad 0 \leq t < \infty$$

ein stetiges, lokales Martingal bzgl. $\{\mathcal{F}_t\}$ *ist für jedes* $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$*, heißt Lösung des lokalen Martingal Problems zu* $\mathcal{A}'_t$*, bzw zu* (a,b)*.*
Wobei der funktionale Differentialoperator zu $b(t,x)$ *und* $\sigma(t,x)$ *gegeben ist durch*

$$(\mathcal{A}'_t f)(y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d a_{ik}(t,y)\frac{\partial^2 f(y(t))}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^d b_i(t,y)\frac{\partial f(y(t))}{\partial x_i} \quad 0 \leq t < \infty$$

mit $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ *und für* $y \in C[0,\infty)^d$

1 Äquivalenz des lokalen Martingalproblems zur "schwachen"-Formulierung

Theorem 1 *(Teil 1)*
Sei $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ *schwache Lösung von (1) mit* $b_i(t,x), \sigma_{ij}(t,x)$ $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq r$ *progessiv-messbare Funktionale. Die Diffusionsmatrix* $a(t,y)$ *sei gegeben durch*

$$a_{ik}(t,y) = \sum_{j=1}^{r} \sigma_{ij}(t,y)\sigma_{kj}(t,y) \quad 0 \leq t < \infty; y \in C[0,\infty)^d$$

Dann löst $\mathbb{P}^{\mathbb{X}}$ *die Verteilung von* X *das lokale Martingalproblem zu* (a, b)

Theorem 2 *(Teil 2)*
Sei $\mathbb{P}$ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $(C[0,\infty)^d, \mathcal{B}(C[0,\infty)^d))$ *unter dem* M_t^f *ein stetiges, lokales Martingal ist, also auch für* $f(x) = x_i$ *und* $f(x) = x_i x_k; 1 \leq i,k \leq d$.
Dann existiert eine r*-dimensionale Brownsche Bewegung* W *bzgl* $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$ *auf* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ *einer Erweiterung von* $(C[0,\infty)^d, \mathcal{B}(C[0,\infty)^d), \mathbb{P})$, *so dass* $(X = y, W), (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}), \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$ *eine schwache Lösung von (1) ist.*

Korollar 1 *(Existenz)*
Die Existenz einer Lösung $\mathbb{P}$ *vom lokalen Martingalproblem bzgl* (a, b) *ist äquivalent zur Existenz einer schwachen Lösung* $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}}), \{\mathcal{F}_t\}$ *der stochastischen Differentialgleichung (1). Der Zusammenhang ist gegeben durch* $\mathbb{P} = \tilde{\mathbb{P}}X^{-1}$.

Korollar 2 *(Eindeutigkeit)*
Die Eindeutigkeit der Lösung $\mathbb{P}$ *des lokalen Martingalproblems bzgl* (a, b) *und mit einer gegebenen Anfangsverteilung* μ *ist äquivalent zur Eindeutigkeit in Verteilung der Lösung von (1).*

Theorem 3 *(Martingal Repräsentations Theorem)*
Sei $M = \{M_t = (M_t^{(1)}, ..., M_t^{(d)})\}$ *ein d-dimensionaler Prozess auf* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *mit* $M^i \in \mathcal{M}^{c,loc}$ *für* $1 \leq i \leq d$. *Sei die quadratische Variation* $\langle M^i, M^k \rangle_t(\omega)$ *absolut stetig in* t *für* P *fast alle* ω *für* $1 \leq i,j \leq d$.
Dann existiert eine Erweiterung $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ *von* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *auf dem eine d-dimensionale Brownsche Bewegung* $W = \{W_t = (W_t^{(1)}, ..., W_t^{(d)})\}$ *adaptiert an* $\tilde{\mathcal{F}}_t$ *existiert und eine Matrix* $X = \{(X_t^{(i,k)})_{i,k=1}^d\}$ *messbarer und an* $\tilde{\mathcal{F}}_t$ *adaptierter Prozess mit der Eigenschaft:*

$$\tilde{\mathbb{P}}\left[\int_0^t (X_s^{(i,k)})^2 ds < \infty\right] = 1; \qquad 1 \leq i,k \leq d; \;\; 0 \leq t < \infty$$

so dass die folgenden $\tilde{\mathbb{P}}$*-f.s Repräsentationen gelten*

$$M_t^{(i)} = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t X_s^{(i,k)} dW_s^{(k)} \qquad 1 \leq i \leq d; \;\; 0 \leq t < \infty$$

$$\langle M^i, M^j \rangle_t = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t X_s^{(i,k)} X_s^{(j,k)} ds \qquad 1 \leq i,j \leq d; \;\; 0 \leq t < \infty$$