Schwache Lösungen von SDEs und das lokale Martingalproblem

Christin Strampe

February 16, 2011

SDE

Betrachte die stochastische Differentialgleichung:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

wobei $W = \{W_t; 0 \leq t < \infty\}$ eine r-dimensionale Brownsche Bewegung, $b_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $(t, x) \mapsto b_i(t, x)$ für $1 \leq i \leq d$ und $\sigma_{ij} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $(t, x) \mapsto \sigma_{ij}(t, x)$ für $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq r$ Borel-messbare Funktionen.

SDE

Betrachte die stochastische Differentialgleichung:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

wobei $W = \{W_t; 0 \leq t < \infty\}$ eine r-dimensionale Brownsche Bewegung, $b_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $(t, x) \mapsto b_i(t, x)$ für $1 \leq i \leq d$ und $\sigma_{ij} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $(t, x) \mapsto \sigma_{ij}(t, x)$ für $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq r$ Borel-messbare Funktionen.

- $b(t, X_t)$ Drift-Vektor
- $\sigma(t, X_t)$ Dispersions-Matrix
- $a(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^T(t, x)$ (eine $d \times d$-Matrix) Diffusionsmatrix

Funktionale SDE

Definition

Für progessiv-messbare Funktionale $b_i(t,x), \sigma_{ij}(t,x)$ $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq r$ von $\mathbb{R}_+ \times C[0,\infty)^d$ nach $\mathbb{R}$ ist die funktionale stochastische Differentialgleichung gegeben durch

$$dX_t = b(t,X)dt + \sigma(t,X)dW_t \tag{1}$$

Mit $W = \{W_t; 0 \leq t < \infty\}$ eine r-dimensionale Brownsche Bewegung.

Funktionale SDE

Definition

Für progessiv-messbare Funktionale $b_i(t,x), \sigma_{ij}(t,x)$ $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq r$ von $\mathbb{R}_+ \times C[0,\infty)^d$ nach $\mathbb{R}$ ist die funktionale stochastische Differentialgleichung gegeben durch

$$dX_t = b(t,X)dt + \sigma(t,X)dW_t \tag{1}$$

Mit $W = \{W_t; 0 \leq t < \infty\}$ eine r-dimensionale Brownsche Bewegung.

Bemerkung

Eine Abbildung $\mu : [0,\infty) \times C[0,\infty)^d \to \mathbb{R}$ nennen wir ein progressiv messbares Funktional, wenn für jedes $t \geq 0$ die Einschränkung von μ auf $[0,t] \times C[0,\infty)^d$ messbar ist bezüglich $(\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{B}_t, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Motivation

Schwache Lösungen

Das lokale Martingalproblem

Äquivalenz des lokalen Martingalproblems zur "schwachen"-Formulierung

Existenz und Eindeutigkeit

Definition

Eine schwache Lösung der funktionalen SDE (1) ist das Tripel $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$, falls

Definition

Eine schwache Lösung der funktionalen SDE (1) ist das Tripel $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$, falls

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\mathcal{F}_t\}$ ist eine Filtration von $\mathcal{F}$, die die üblichen Bedingungen ("usual conditions") erfüllt.

Definition

Eine schwache Lösung der funktionalen SDE (1) ist das Tripel $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$, falls

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\mathcal{F}_t\}$ ist eine Filtration von $\mathcal{F}$, die die üblichen Bedingungen ("usual conditions") erfüllt.
- X ist ein stetiger, an $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptierter, $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess und W eine r-dimensionale Brownsche Bewegung bzgl $\{\mathcal{F}_t\}$

Definition

Eine schwache Lösung der funktionalen SDE (1) ist das Tripel $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$, falls

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\mathcal{F}_t\}$ ist eine Filtration von $\mathcal{F}$, die die üblichen Bedingungen ("usual conditions") erfüllt.
- X ist ein stetiger, an $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptierter, $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess und W eine r-dimensionale Brownsche Bewegung bzgl $\{\mathcal{F}_t\}$
- $\mathbb{P}\left(\int_0^t |b_i(s,X)|ds + \int_0^t \sigma_{ij}^2(s,X)ds < \infty\right) = 1$ für $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq r$, $0 \leq t < \infty$

Definition

Eine schwache Lösung der funktionalen SDE (1) ist das Tripel $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$, falls

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\mathcal{F}_t\}$ ist eine Filtration von $\mathcal{F}$, die die üblichen Bedingungen ("usual conditions") erfüllt.
- X ist ein stetiger, an $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptierter, $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess und W eine r-dimensionale Brownsche Bewegung bzgl $\{\mathcal{F}_t\}$
- $\mathbb{P}\left(\int_0^t |b_i(s,X)|ds + \int_0^t \sigma_{ij}^2(s,X)ds < \infty\right) = 1$ für $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq r$, $0 \leq t < \infty$
- und X erfüllt $\mathbb{P}$-f.s die Integralgleichung

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X)ds + \int_0^t \sigma(s,X)dW_s \quad 0 \leq t < \infty$$

Beispiel 1

Betrachte die eindimensionale SDE mit Startwert $X_0 = 0$:

$$dX_t = sgn(X_t)dW_t \tag{2}$$

wobei $sgn = \mathbb{1}_{(0,\infty)} - \mathbb{1}_{(-\infty,0)}$.

Beispiel 1

Konstruktion einer schwachen Lösung:

Beispiel 1

Konstruktion einer schwachen Lösung:

- $(X_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\{\mathcal{F}_t\} = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$

Beispiel 1

Konstruktion einer schwachen Lösung:

- $(X_t)_{t \geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\{\mathcal{F}_t\} = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$
- Brauchen: Brownsche Bewegung $(W_t)_{t \geq 0}$: Setze

$$W_t = \int_0^t sgn(X_s) dX_s \quad 0 \leq t < \infty$$

Beispiel 1

Konstruktion einer schwachen Lösung:

- $(X_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\{\mathcal{F}_t\} = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$
- Brauchen: Brownsche Bewegung $(W_t)_{t\geq 0}$: Setze

$$W_t = \int_0^t sgn(X_s)dX_s \quad 0 \leq t < \infty$$

$\Rightarrow (W_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges Martingal bzgl $\{\mathcal{F}_t\}$, da sgn(x) beschränkt mit

$$\langle W \rangle_t = \int_0^t (sgn(X_s))^2 ds = \int_0^t 1 ds = t$$

Beispiel 1

Konstruktion einer schwachen Lösung:

- $(X_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\{\mathcal{F}_t\} = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$
- Brauchen: Brownsche Bewegung $(W_t)_{t\geq 0}$: Setze

$$W_t = \int_0^t sgn(X_s) dX_s \quad 0 \leq t < \infty$$

$\Rightarrow (W_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges Martingal bzgl $\{\mathcal{F}_t\}$, da sgn(x) beschränkt mit

$$\langle W \rangle_t = \int_0^t (sgn(X_s))^2 ds = \int_0^t 1 ds = t$$

$\Rightarrow (W_t)_{t\geq 0}$ ist Brownsche Bewegung nach Levy-Charakterisierung.

Beispiel 1

Konstruktion einer schwachen Lösung:

- $(X_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\{\mathcal{F}_t\} = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$
- Brauchen: Brownsche Bewegung $(W_t)_{t\geq 0}$: Setze

$$W_t = \int_0^t sgn(X_s) dX_s \quad 0 \leq t < \infty$$

$\Rightarrow (W_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges Martingal bzgl $\{\mathcal{F}_t\}$, da sgn(x) beschränkt mit

$$\langle W \rangle_t = \int_0^t (sgn(X_s))^2 ds = \int_0^t 1 ds = t$$

$\Rightarrow (W_t)_{t\geq 0}$ ist Brownsche Bewegung nach Levy-Charakterisierung.

- $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ eine schwache Lösung von (2)

Eindeutigkeit?

In welchem Sinne?

Eindeutigkeit?

In welchem Sinne?
z.B.$(-X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ ist auch eine schwache Lösung von (2)

Eindeutigkeit?

In welchem Sinne?
z.B.$(-X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ ist auch eine schwache Lösung von (2)

Definition

Eine SDE heißt eindeutig in Verteilung lösbar, falls für je zwei Lösungen $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ und $(\tilde{X}, \tilde{W}), (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}), \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$ gilt:
$X, \tilde{X}$ die gleiche Verteilung haben und für die Anfangsverteilung gilt:

$$\mathbb{P}(X_0 \in A) = \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{X}_0 \in A) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

Motivation

Schwache Lösungen

Das lokale Martingalproblem

Äquivalenz des lokalen Martingalproblems zur "schwachen"-Formulierung

Existenz und Eindeutigkeit

Vorbemerkungen

- $b_i(t,x), a_{ij}(t,x)\ 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq r$
  von $\mathbb{R}_+ \times C[0,\infty)^d$ nach $\mathbb{R}$ progressiv-messbare Funktionale

Vorbemerkungen

- $b_i(t,x), a_{ij}(t,x)$ $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq r$
  von $\mathbb{R}_+ \times C[0,\infty)^d$ nach $\mathbb{R}$ progressiv-messbare Funktionale

- kanonischer Raum stetiger Prozesse $(C[0,\infty)^d, \mathcal{B}(C[0,\infty)^d))$

Vorbemerkungen

- $b_i(t,x), a_{ij}(t,x)$ $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq r$
  von $\mathbb{R}_+ \times C[0,\infty)^d$ nach $\mathbb{R}$ progressiv-messbare Funktionale

- kanonischer Raum stetiger Prozesse $(C[0,\infty)^d, \mathcal{B}(C[0,\infty)^d))$

- Der funktionale Differentialoperator zu b und $a = \sigma\sigma^T$ ist gegeben durch

$$(\mathcal{A}'_t f)(y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} a_{ik}(t,y)\frac{\partial^2 f(y(t))}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{d} b_i(t,y)\frac{\partial f(y(t))}{\partial x_i} \quad 0 \leq t < \infty$$

mit $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ und für $y \in C[0,\infty)^d$

Definition

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(C[0,\infty)^d, \mathcal{B}(C[0,\infty)^d))$ unter dem

$$M_t^f = f(y(t)) - f(y(0)) - \int_0^t (\mathcal{A}'_s f)(y) ds \quad 0 \leq t < \infty \tag{3}$$

ein stetiges, lokales Martingal bzgl. $\mathcal{F}_t$ ist für jedes $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, heißt Lösung des lokalen Martingal Problems zu $\{\mathcal{A}'_t\}$, bzw zu (a,b).

Definition

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(C[0,\infty)^d, \mathcal{B}(C[0,\infty)^d))$ unter dem

$$M_t^f = f(y(t)) - f(y(0)) - \int_0^t (\mathcal{A}'_s f)(y) ds \quad 0 \leq t < \infty \tag{3}$$

ein stetiges, lokales Martingal bzgl. $\mathcal{F}_t$ ist für jedes $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, heißt Lösung des lokalen Martingal Problems zu $\{\mathcal{A}'_t\}$, bzw zu (a,b).

Bemerkung

Die Filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ ist eine Erweiterung der kanonischen Filtration $\{\mathcal{B}_t\}$, wobei

$$\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_t(C[0,\infty)^d) = \sigma(x(s); 0 \leq s \leq t)$$

$\{\mathcal{F}_t\}$ genügt den "üblichen Bedingungen " (usual conditions), also enthält $\{\mathcal{F}_t\}$ die $\mathbb{P}$ Nullmengen und ist recht stetig.

Beispiel 2

$(W_t)_{t \geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung und $f \in C^2(\mathbb{R})$.
Nach der Ito-Formel für Brownsche Bewegungen gilt dann

Beispiel 2

$(W_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung und $f \in C^2(\mathbb{R})$.
Nach der Ito-Formel für Brownsche Bewegungen gilt dann

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds$$

Beispiel 2

$(W_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung und $f \in C^2(\mathbb{R})$.
Nach der Ito-Formel für Brownsche Bewegungen gilt dann

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\int_0^t f'(W_s)dW_s}_{\text{stet. lok. Martingal}} = f(W_t) - f(W_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds$$

Beispiel 2

$(W_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung und $f \in C^2(\mathbb{R})$.
Nach der Ito-Formel für Brownsche Bewegungen gilt dann

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds$$

$$\iff \underbrace{\int_0^t f'(W_s)dW_s}_{\text{stet. lok. Martingal}} = f(W_t) - f(W_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds$$

Also löst $(W_t)_{t\geq 0}$, bzw P^W, das lokale Martingalproblem zu (a, b) mit $b = 0, a = 1$

Schwache Lösung löst lokales Martingalproblem

Theorem

Sei $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$ *schwache Lösung von (1) mit* $b_i(t,x), \sigma_{ij}(t,x)$ $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq r$ *progessiv-messbare Funktionale. Die Diffusionsmatrix* $a(t,y)$ *sei gegeben durch*

$$a_{ik}(t,y) = \sum_{j=1}^{r} \sigma_{ij}(t,y)\sigma_{kj}(t,y) \quad 0 \leq t < \infty; y \in C[0,\infty)^d$$

Dann löst $\mathbb{P}^X$ *die Verteilung von* X *das lokale Martingalproblem bzgl* (a, b)*.*

Beweis:

Zu zeigen: Für $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ ist folgender Prozess ein stetiges lokales Martingal:

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (\mathcal{A}_s' f)(X_s) ds \quad 0 \leq t < \infty$$

Beweis:

Zu zeigen: Für $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ ist folgender Prozess ein stetiges lokales Martingal:

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (\mathcal{A}'_s f)(X_s) ds \quad 0 \leq t < \infty$$

Ito-Formel für Ito-Prozesse auf (X_t) angewandt ergibt:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(X_s) d \langle X \rangle_s$$

Beweis:

Zu zeigen: Für $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ ist folgender Prozess ein stetiges lokales Martingal:

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (\mathcal{A}'_s f)(X_s) ds \quad 0 \leq t < \infty$$

Ito-Formel für Ito-Prozesse auf (X_t) angewandt ergibt:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(X_s) d \langle X \rangle_s$$

Da $dX_t = b(t, X)dt + \sigma(t, X)dW_t$ erfüllt ist, gilt für die quadratische Variation

$$d \left\langle X^{(i)}, X^{(k)} \right\rangle_t = a_{ik}(t, y)dt = \sum_{j=1}^{r} \sigma_{ij}(t, y)\sigma_{kj}(t, y)dt$$

Beweis:

Zu zeigen: Für $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ ist folgender Prozess ein stetiges lokales Martingal:

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (\mathcal{A}'_s f)(X_s) ds \quad 0 \leq t < \infty$$

Ito-Formel für Ito-Prozesse auf (X_t) angewandt ergibt:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(X_s) d \langle X \rangle_s$$

Da $dX_t = b(t, X)dt + \sigma(t, X)dW_t$ erfüllt ist, gilt für die quadratische Variation

$$d \left\langle X^{(i)}, X^{(k)} \right\rangle_t = a_{ik}(t, y)dt = \sum_{j=1}^r \sigma_{ij}(t, y)\sigma_{kj}(t, y)dt$$

$$f(X_t) = f(X_0) + \underbrace{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r \int_0^t \sigma_{ij}(s, X) \frac{\partial}{\partial x} f(X_s) dW^{(j)}s}_{=M_t^f} + \int_0^t (\mathcal{A}'_s f)(X) ds$$

Fortsetzung Beweis:

$\mathbb{P}\left(\int_0^t \sigma_{ij}^2(s,X)ds < \infty\right) = 1$ ist eine Bedingung der schwachen Lösung, damit gilt für folgende lokalisierender Stoppzeitenfolge

$$\tau_k = \inf\{t \geq 0 : \|X_t\| \geq k \text{ oder } \int_0^t \sigma_{ij}^2(s,X)ds \geq k \text{ für } (i,j)\}$$

Fortsetzung Beweis:

$\mathbb{P}\left(\int_0^t \sigma_{ij}^2(s,X)ds < \infty\right) = 1$ ist eine Bedingung der schwachen Lösung, damit gilt für folgende lokalisierender Stoppzeitenfolge

$$\tau_k = \text{inf}\{t \geq 0 : \|X_t\| \geq k \text{ oder } \int_0^t \sigma_{ij}^2(s,X)ds \geq k \text{ für } (i,j)\}$$

$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$

Fortsetzung Beweis:

$\mathbb{P}\left(\int_0^t \sigma_{ij}^2(s,X)ds < \infty\right) = 1$ ist eine Bedingung der schwachen Lösung, damit gilt für folgende lokalisierender Stoppzeitenfolge

$$\tau_k = \inf\{t \geq 0 : \|X_t\| \geq k \;\text{ oder }\; \int_0^t \sigma_{ij}^2(s,X)ds \geq k \;\text{ für }\; (i,j)\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$$

$\Rightarrow M^f_{t\wedge\tau_k} \quad t \geq 0$ ist ein Martingal

Fortsetzung Beweis:

$\mathbb{P}\left(\int_0^t \sigma_{ij}^2(s,X)ds < \infty\right) = 1$ ist eine Bedingung der schwachen Lösung, damit gilt für folgende lokalisierender Stoppzeitenfolge

$$\tau_k = \inf\{t \geq 0 : \|X_t\| \geq k \ \text{ oder } \ \int_0^t \sigma_{ij}^2(s,X)ds \geq k \ \text{ für } \ (i,j)\}$$

$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$

$\Rightarrow M^f_{t\wedge\tau_k} \quad t \geq 0$ ist ein Martingal
$\Rightarrow M^f_t$ ein stetiges lokales Martingal.

Lösung des lok. MP induziert schwache Lösung

Theorem

Sei $\mathbb{P}$ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $(C[0,\infty)^d, \mathcal{B}(C[0,\infty)^d))$ *unter dem* M_t^f *ein stetiges, lokales Martingal ist, also auch für* $f(x) = x_i$ *und* $f(x) = x_i x_k; 1 \leq i, k \leq d$.
Dann existiert eine r*-dimensionale Brownsche Bewegung* W *bzgl* $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$ *auf* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ *einer Erweiterung von* $(C[0,\infty)^d, \mathcal{B}(C[0,\infty)^d), \mathbb{P})$*, so dass* $(X = y, W), (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}), \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$ *eine schwache Lösung von (1) ist.*

Theorem: Martingale Representation Theorem

Sei $M = \{M_t = (M_t^{(1)}, ..., M_t^{(d)})\}$ ein d-dimensionaler, $\{\mathcal{F}\}$-adaptierter Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $M^i \in \mathcal{M}^{c,loc}$ für $1 \leq i \leq d$. Sei die quadratische Variation $\langle M^i, M^k \rangle_t(\omega)$ absolut stetig in t für $\mathbb{P}$ fast alle ω für $1 \leq i, j \leq d$.
Dann existiert eine Erweiterung $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ auf dem eine d-dimensionale Brownsche Bewegung $W = \{W_t = (W_t^{(1)}, ..., W_t^{(d)})\}$ adaptiert an $\tilde{\mathcal{F}}_t$ existiert und eine Matrix $\rho = \{(\rho_{ik}(t))_{i,k=1}^d\}$ messbarer und an $\tilde{\mathcal{F}}_t$ adaptierter Prozesse mit der Eigenschaft:

$$\tilde{\mathbb{P}}\left[\int_0^t (\rho_{ik}(s))^2 ds < \infty\right] = 1; \quad 1 \leq i, k \leq d; \;\; 0 \leq t < \infty$$

so dass die folgenden $\tilde{\mathbb{P}}$-f.s Repräsentationen gelten

$$M_t^{(i)} = \sum_{k=1}^d \int_0^t \rho_{ik}(s) dW_s^{(k)} \qquad 1 \leq i \leq d; \;\; 0 \leq t < \infty$$

$$\langle M^i, M^j \rangle_t = \sum_{k=1}^d \int_0^t \rho_{ik}(s)\rho_{jk}(s) ds \qquad 1 \leq i, j \leq d; \;\; 0 \leq t < \infty$$

Levy-Charakterisierung

Sei X ein stetiger, $\mathcal{F}_t$-adaptierter, $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess mit

- $M_t^{(k)} = X_t^{(k)} - X_0^{(k)} \quad 0 \leq t < \infty$ ein stetiges, lokales Martingal bzgl $\mathcal{F}_t$
- $\left\langle M^{(k)} \right\rangle_t = t$

für $1 \leq k \leq d$.

Dann ist X eine d-dimensionale Brownsche Bewegung.

Wichtige Folgerungen und Anwendung des eben bewiesenen Theorems:

Korollar 1

Die Existenz einer Lösung $\mathbb{P}$ vom lokalen Martingalproblem mit (a, b) ist äquivalent zur Existenz einer schwachen Lösung $(X, W), (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}), \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$ der stochastischen Differentialgleichung (1). Der Zusammenhang ist gegeben durch $\mathbb{P} = \tilde{\mathbb{P}} \circ X^{-1}$.

Korollar 2

Die Eindeutigkeit der Lösung $\mathbb{P}$ des lokalen Martingalproblems mit (a, b) und mit einer gegebenen Anfangsverteilung μ ist äquivalent zur Eindeutigkeit in Verteilung der Lösung von (1).

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!