

# ZEITSTETIGE MARKOV-PROZESSE: EINFÜHRUNG UND BEISPIELE

SIMONE WIELART

*Handout zum Vortrag im Seminar „Markov-Prozesse: Beispiele, Eigenschaften und Anwendungen“ am 08.12.10*

Sei  $I$  eine abzählbare Menge.

## 1. Q-MATRIZEN UND IHRE EXPONENTIALIALE

**Definition 1.1.** [Q-Matrix nach [1], S.60]  $Q := (q_{ij})_{i,j \in I}$  heißt Q-Matrix, wenn  $\forall i \in I$

- i)  $0 \leq -q_{ii} < \infty$
- ii)  $q_{ij} \geq 0$  für  $i \neq j, j \in I$
- iii)  $\sum_{j \in I} q_{ij} = 0$ .

**Satz 1.1.** [Zusammenhang zwischen Q-Matrix und stochastischer Matrix, s. [1], Theorem 2.1.2]  $Q$  ist Q-Matrix  $\Leftrightarrow P(t) = \exp(t \cdot Q)$  ist für alle  $t \geq 0$  eine stochastische Matrix.

## 2. ZEITSTETIGE STOCHASTISCHE PROZESSE

**Definition 2.1.** [Zeitstetiger stochastischer Prozess, nach [1], S.67] Familie von ZV'en  $X_t : \Omega \rightarrow I, t \in [0, \infty)$ , heißt zeitstetiger stochastischer Prozess mit Werten in  $I$ . Schreibweise:  $(X_t)_{t \geq 0}$

**Definition 2.2.** [nach [1], S.69]

- Sprungzeit:  $J_n, n \in \mathbb{N}_0$ , mit  $J_0 = 0$  und

$$J_{n+1} = \inf\{t \geq J_n : X_t \neq X_{J_n}\} \quad \forall n \geq 1$$

- Sprungkette:  $(Y_n)_{n \geq 0}$  mit  $Y_n = X_{J_n}$
- Verweildauer:  $S_n, n \in \mathbb{N}$ , mit

$$S_n = \begin{cases} J_n - J_{n-1} & \text{wenn } J_{n-1} < \infty \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

## 3. POISSON-PROZESSE

**Definition 3.1.** [Poisson-Prozess, nach [1], S.73/74]  $\mathbb{N}_0$ -wertiger, rechtsstetiger Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$  heißt Poisson-Prozess der Intensität  $\lambda, 0 < \lambda < \infty$ , wenn

- i)  $S_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(\lambda), n \in \mathbb{N}$ ,
- ii) die Sprungkette  $(Y_n)_{n \geq 0}$  ist gegeben durch  $Y_n := X_{J_n} = n$ .

Diagramm:  $\textcircled{0} \xrightarrow{\lambda} \textcircled{1} \xrightarrow{\lambda} \textcircled{2} \xrightarrow{\lambda} \textcircled{3} \dots$ ,  $Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & \\ & -\lambda & \lambda & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

**Satz 3.1.** [Markov-Eigenschaft, s. [1], Theorem 2.4.1]  $(X_t)_{t \geq 0}$  Poisson-Prozess der Intensität  $\lambda$ . Für jedes  $s \geq 0$ :  $(X_{s+t} - X_s)_{t \geq 0}$  ist Poisson-Prozess der Intensität  $\lambda$  und unabhängig von  $(X_r)_{r \leq s}$ .

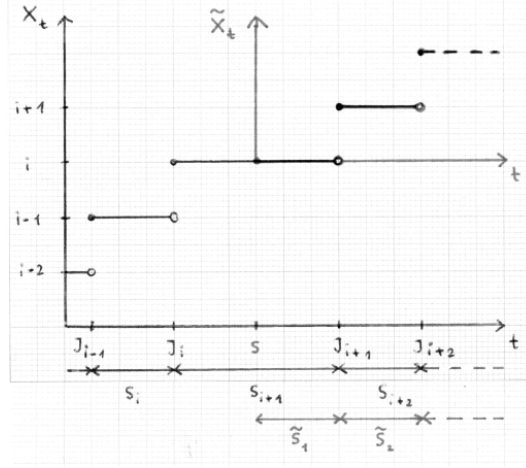
*Beweis.*

- Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein Poisson-Prozess der Intensität  $\lambda$  und  $s \geq 0$ . Dann gilt  $X_s = i$  für ein  $i \geq 0$  und wir definieren  $\tilde{X}_t := X_{s+t} - X_s$ .
- $\tilde{J}_0 := 0$ ,  $\tilde{J}_n := J_{i+n} - s$  für  $n \geq 1 \Rightarrow \tilde{X}_{\tilde{J}_0} = 0$  und  $\tilde{X}_{\tilde{J}_n} = n$  für  $n \geq 1$ .
- Sei  $n \geq 0$  und  $t \in (\tilde{J}_n, \tilde{J}_{n+1}) = (J_{i+n} - s, J_{i+n+1} - s)$ . Dann folgt  $\tilde{X}_t = \tilde{X}_{\tilde{J}_n}$ .
- Schließlich betrachten wir noch die Verweildauern. Es ist

$$\tilde{S}_1 = J_{i+1} - s = S_{i+1} - (s - J_i)$$

und  $\tilde{S}_n = S_{i+n}$  für  $n \geq 2$ . Aus der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung und  $S_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$  folgt, dass  $\tilde{S}_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$  für  $n \geq 2$ .

- $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$  ist also ein Poisson-Prozess der Intensität  $\lambda$  und unabhängig von  $(X_r)_{r \leq s}$ .



□

**Satz 3.2.** [Äquivalente Beschreibungen von Poisson-Prozessen, s. [1], Theorem 2.4.3]  $(X_t)_{t \geq 0}$  wachsender, rechtsstetiger  $\mathbb{N}_0$ -wertiger Poisson-Prozess der Intensität  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < \infty$ , der in 0 startet. Dann sind äquivalent:

- (Sprungzeiten-/Verweildauerdefinition) i) und ii) der Definition 3.1 gelten,
- (Infinitesimaldefinition)  $(X_t)_{t \geq 0}$  hat unabhängige Inkremente und für kleine  $h \geq 0$  gilt

$$\mathbb{P}[X_{t+h} - X_t = 0] = 1 - \lambda \cdot h + o(h),$$

$$\mathbb{P}[X_{t+h} - X_t = 1] = \lambda \cdot h + o(h).$$

- (Definition mit Hilfe von Übergangswahrscheinlichkeiten)  $(X_t)_{t \geq 0}$  hat stationäre und unabhängige Inkremente und  $X_t \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot t)$  für alle  $t \geq 0$ .

#### LITERATUR

- [1] J.R. Norris, *Markov Chains*, Cambridge University Press, 1998.