

***** Weihnachtsaufgabe *****

Das schönste Rentier von allen!

Wie jedes Jahr zu Weihnachten müssen sich der Weihnachtsmann und sein Engelchen im Weihnachtsmagazin ein Rentier aussuchen. Und natürlich wollen sie zu gern das schönste Rentier bekommen.

„Oje, was ist die Auswahlprozedur dieses Jahr kompliziert“, grummelt der Weihnachtsmann. „Aber wieso denn?“, fragt das Engelchen. Der Weihnachtsmann erklärt: „Die Wichtel im Magazin führen uns nacheinander verschiedene Rentiere vor, von denen wir uns eines aussuchen dürfen. Die Rentiere verlangen jedoch, dass wir uns jeweils gleich entscheiden, ob wir das jeweilige Rentier nehmen wollen oder es ablehnen, um eines der Folgenden zu nehmen. Ein einmal abgelehntes Rentier steht also später nicht mehr zur Verfügung. Und spätestens das zehnte Rentier müssen wir nehmen, denn dann haben die Wichtel keine Lust mehr.“ „Klingt doch spannend. Wo ist das Problem?“, meint das Engelchen. „Nun ja“, brummte der Weihnachtsmann, „die Rentiere werden uns in zufälliger Reihenfolge vorgeführt, und ich habe kein Vorwissen über die Qualität des diesjährigen Rentierangebotes. Weil wir die Rentiere nicht alle vorher ansehen dürfen, können wir nicht wissen, ob das gerade angebotene Tier das Schönste ist oder ob vielleicht noch ein Besseres kommt. Entscheiden wir uns für das gerade angebotene Tier, könnte es doch sein, dass später ein noch Schöneres kommt. Entscheiden wir uns andererseits, noch weitere Tiere anzusehen, kann es uns passieren, dass wir das schönste Rentier verpassen.“

Sie überlegen nun, wie sie es am besten anstellen, um mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit das Schönste der zehn Rentiere zu erhalten. „Mir fällt nichts Rechtes ein. Wenn wir nicht wissen, welches das Schönste sein wird, können wir genauso gut gleich das Erste nehmen.“, sagt der Weihnachtsmann. „Nein, es geht besser“, ruft das Engelchen, „wenn wir uns erst ein paar Exemplare ansehen! Denn dabei lernen wir etwas über die Qualität der Tiere.“ „Und wie lange willst Du das machen?“, fragt der Weihnachtsmann, „Wenn wir bis zum letzten Tier warten, lernen wir wohl am meisten, oder?“ „Schon“, schmunzelt das Engelchen, „aber dann hätten wir nicht mehr viel davon, weil wir uns ja nur noch für das letzte Tier entscheiden könnten.“ „Mmmh. Die Antwort liegt also wohl in der goldenen Mitte?“, überlegt der Weihnachtsmann. „Vielleicht nicht ganz“, erklärt das Engelchen, „Lass uns

erst X Rentiere nur ansehen, und danach unter den verbleibenden $10 - X$ Tieren das Nächstfolgende auswählen, welches besser ist als das Beste aus den ersten X Tieren (oder das Letzte, falls kein Besseres mehr kommt). “ „Und du weisst schon, für welches X die Wahrscheinlichkeit am größten wird, dass wir so das schönste Rentier auswählen?“, fragt der Weihnachtsmann hoffnungsvoll. „Ja“, lacht das Engelchen, „wir haben sogar eine Chance von fast ... Prozent, wenn wir uns erst die optimale Anzahl X^* von Tieren ansehen. Das optimale X^* ist ... “

1. Formulieren Sie dies als Stopproblem mit $T = n \in \mathbb{N}$ Tieren.

Bestimmen Sie die Snellsche Einhüllende und beweisen Sie, dass eine Strategie von der Form, wie vorgeschlagen wurde, tatsächlich optimal über alle Stopzeitenstrategien ist.

(Gehen Sie davon aus, dass die Rentiere unterschiedlich schön sind und in rein zufälliger Reihenfolge vorgeführt werden.)

2. Finden Sie die optimale Strategie für $n = 10$ und ihre Erfolgchance.
3. Wie entwickelt sich jene für $n \rightarrow \infty$? (Hinweis: $\lim X^*(n)/n$ ist ?)