

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
STOCHASTISCHE FINANZMATHEMATIK I

Serie 1

- 1) Gegeben sei ein Finanzmarkt bestehend aus einer risikofreien Anlage und zwei Aktien. Die risikofreie Anlage habe einen Zinssatz von 0.4, d.h. $\pi^0 = 1$ und $S^0 = 1.4$. Der Aktienpreis heute sei $\pi = (\pi^1, \pi^2) = (2, 4)$. Für die mögliche Kursentwicklung der Aktien gelte $S(\omega_1) = (2, 4)$ und $S(\omega_2) = (5, 7)$, wobei beide Szenarien mit derselben Wahrscheinlichkeit eintreten. Man zeige, dass das Modell nicht arbitragefrei ist, indem man eine Handelsstrategie ξ angibt, die zur Arbitrage führt. Finden Sie einen alternativen Vektor π von Aktienpreisen, mit dem der Markt arbitragefrei ist.
- 2) Sei C eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Menge in \mathbb{R}^n . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
 - i) Es gibt ein $\eta \in \mathbb{R}^n$ mit $\inf\{\eta \cdot X : x \in C\} > 0$.
 - ii) $0 \notin C$
- 3) Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) sei $P^* \ll P$ ein absolutstetiges Wahrscheinlichkeitsmaß und Z eine reelle Zufallsvariable.
 - i) Zeigen Sie: Dann sind folgende drei Aussagen äquivalent
 - (1) $E^*[X] = E[ZX] \quad \forall$ Zufallsvariablen $X \geq 0$,
 - (2) $P^*[A] = E[Z1_A] \quad \forall A \in \mathcal{F}$,
 - (3) $P^*[A] = E[Z1_A] \quad \forall A$ eines \cap -stabilen Generators \mathcal{G} von \mathcal{F} , mit $\Omega \in \mathcal{G}$,und ein solches Z ist P -f.s. eindeutig bestimmt, nichtnegativ und P -integrierbar ($Z \in L^1(P)$). Wir schreiben dann dP^*/dP für Z .
 - ii) Zeigen Sie: Äquivalenz $P^* \sim P$ gilt genau dann wenn $Z > 0$ P -f.s., und in jenem Falle gilt $dP/dP^* = 1/Z$.
- 4) Wir betrachten das folgende Finanzmarktmodell mit Zinsrate $r > -1$,

$$\Omega = \{\omega^+, \omega^-\}, \quad p := P(\{\omega^+\}) = \frac{1}{2}$$

und einem risikobehafteten Wertpapier mit Anfangswerten $\pi^1 = 100$ und Wertentwicklung $S^1(\omega^+) = 120$, $S^1(\omega^-) = 90$. Ferner sei $C := (S^1 - K)^+$ eine Call-Option auf S^1 mit Ausübungspreis $K = 100$.

- i) Für welche Werte von r ist das Modell arbitragefrei? Bestimmen Sie das risikoneutrale Maß P^* , also den Wert $p^* := P^*(\{\omega^+\})$.
- ii) Finden Sie eine Absicherungsstrategie $\xi = (\xi^0, \xi^1)$ für den Call, d.h. bestimmen Sie $\xi^0, \xi^1 \in \mathbb{R}$, so dass

$$C = \xi^0(1+r) + \xi^1 S^1.$$

Zeigen Sie, dass die für die Absicherungsstrategie nötige Anfangsinvestition mit dem risikoneutralen Preis $E^* \left[\frac{C}{1+r} \right]$ übereinstimmt.

- iii) Zeigen Sie, dass es für $r \neq \frac{1}{20}$ in diesem Modell Arbitragemöglichkeiten gibt, falls man den Call zur Zeit $t = 0$ zu einem Preis handeln kann, welcher als Erwartungswert $E \left[\frac{C}{1+r} \right]$ unter dem ursprünglichen Maß berechnet. Finden Sie eine Arbitragestrategie mit $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} = 0$, deren Gewinn zur Zeit $t = 1$ gleich

$$(1+r) \left| E \left[\frac{C}{1+r} \right] - E^* \left[\frac{C}{1+r} \right] \right|$$

ist.

(this version: 26.10.16)

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
STOCHASTISCHE FINANZMATHEMATIK I

Serie 2

- 1) Lösen Sie Aufgabe 1.4.4 (a) aus der Referenz Föllmer/Schied (z.B. Ed. 3 oder 4)¹.
- 2) In einem arbitragefreien Markt mit risikolosem Zinssatz r können drei Call-Optionen C_j^{call} , $j = 1, 2, 3$, auf dasselbe Wertpapier mit verschiedenen Ausübungspreisen $K_1 \leq K_2$ und $K_3 = \lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gehandelt werden. Zeigen Sie:

$$(1 + r)(\pi(C_1^{\text{call}}) - \pi(C_2^{\text{call}})) \leq (K_2 - K_1) \quad (1)$$

$$\lambda \pi(C_1^{\text{call}}) + (1 - \lambda)\pi(C_2^{\text{call}}) \geq \pi(C_3^{\text{call}}) \quad (2)$$

- 3) Auf (Ω, \mathcal{F}, P) sei ein Finanzmarkt gegeben mit $\pi^0 = 1, \pi^1 > 0$, bestehend aus einem risikolosen Sparbuch mit $S^0 = 1 + r$ und einer Aktie $S = S^1$ mit $S = \pi^1 \exp(\sigma W - m)$, für Parameter $\sigma > 0, m \in \mathbb{R}$, wobei $W \sim \mathcal{N}(0, 1)$ sei. Bestimmen Sie die Arbitragepreisschranken $\pi_{\text{inf}}(C)$ und $\pi_{\text{sup}}(C)$ für

$$\text{eine Call-Option } C = (S - K)^+ \text{ mit Ausübungspreis } K > 0. \quad (3)$$

Ist das Marktmodell vollständig?

- 4) i) Sei f eine nichtnegative endliche konvexe Funktion auf $[0, \infty)$ und $C = f(V)$ ein Derivat auf ein nichtnegatives Auszahlungsprofil $V \in \mathcal{V}$ in einem arbitragefreien Modell $(\bar{\pi}, \bar{S})$ mit Zinsrate $r \geq 0$. Man beweise die folgenden Arbitrage-schranken für die Preise von C :

$$\frac{f(\pi(V)(1 + r))}{1 + r} \leq \pi_{\text{inf}}(C) \quad \text{und} \quad \pi_{\text{sup}}(C) \leq \frac{f(0)}{1 + r} + \lim_{x \uparrow \infty} \frac{f(x)}{x} \pi(V).$$

- ii) Welche allgemeine Abschätzungen erhalten Sie hieraus für die Arbitragepreisschranken einer Call-Option $C^{\text{Call}} = (S^1 - K)^+$? Sind diese Abschätzungen scharf?

¹Online-Zugang gemäß Informationsblatt

5*) Welche Implikationen zwischen den folgenden Aussagen gelten im Ein-Perioden Modell $(\bar{\pi}, \bar{S})$ der Vorlesung mit Zinssatz r ? Beweisen Sie jeweils die Implikation oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

- i) Es gibt keine Arbitragemöglichkeit.
- ii) Für jede Strategie $\bar{\xi} = (\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ gilt: Ist $\bar{\xi} \cdot \bar{S} \geq 0$ P -f.s. und $P[\bar{\xi} \cdot \bar{S} > 0] > 0$, dann ist $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} > 0$.
- iii) Für jede Strategie $\bar{\xi} = (\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ gilt: Ist $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} \leq 0$ und $\bar{\xi} \cdot \bar{S} \geq 0$ P -f.s., dann ist $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} = 0$ und $\bar{\xi} \cdot \bar{S} = 0$ P -f.s..
- iv) Für $Y^i = \frac{S^i}{1+r} - \pi^i$ ($i = 1, \dots, d$) und jedes $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^d) \in \mathbb{R}^d$ gilt: Aus $\xi \cdot Y \geq 0$ P -f.s. folgt $\xi \cdot Y = 0$ P -f.s..
- v) Es gibt kein $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} \leq 0$, $\bar{\xi} \cdot \bar{S} \geq 0$ P -f.s. und $P[\bar{\xi} \cdot \bar{S} > 0] > 0$.
- vi) Es gibt kein $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} = 0$, $\bar{\xi} \cdot \bar{S} \geq 0$ P -f.s. und $P[\bar{\xi} \cdot \bar{S} > 0] > 0$.
- vii) Es gibt kein $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} < 0$, $\bar{\xi} \cdot \bar{S} \geq 0$ P -f.s..

(this version: 2.11.16)

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
STOCHASTISCHE FINANZMATHEMATIK I

Serie 3

- 1) Unter den vielen Kunden eines großen Fußballwettenunternehmens seien 40% Fans des FC Bayern München (FCB), 40% Fans des BVB, 10% Herta BSC Fans (HBSC) und 10% Fans anderer Teams der Bundesliga. Das Wettunternehmen bietet vier Wetten an: „Deutscher Meister wird das Team i “ für die Teams $i \in \{1, 2, 3, 4\} \equiv \{FCB, BVB, HBSC, andere\}$ mit Quoten $x_i : y_i$ ($x_i, y_i > 0$); d.h. für den Einsatz $\xi^i \in \mathbb{R}$ auf Team i erhält der Wettende $\xi^i \frac{x_i + y_i}{y_i}$, falls Team i Meister wird. Alle Fans wetten den gleichen Einsatz von 10€ in jeweils einer der vier Wetten, wobei sie als wahre Fans unabhängig von der Quote darauf wetten, dass Ihr Team Meister wird. Das Wettbüro glaubt, dass Team i mit Wahrscheinlichkeit p_i Meister wird, wobei $p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.2$ und $p_3 = 0.1$.
 - i) Formulieren Sie dies als Marktmodell $(\bar{\pi}, \bar{S})$ aus vier Wetten und einem risikolosen Fansparbuch. Der Zins sei $r = 0$.
 - ii) Wie müsste das Wettbüro die Quoten setzen, damit für jede Wette die erwarteten diskontierten Gewinne gleich Null sind?
 - iii) Bestimmen Sie die Wettquoten so, dass die Wahrscheinlichkeit für das Wettbüro, einen Verlust zu machen, minimal wird.
 - iv) Angenommen, es kann² auch noch ein Spekulant mitwetten, welcher seine Einsätze von ohne fußballerische Expertise oder Sympathie plazierte sondern rein gewinnorientiert ist. Jener kann dabei auch (mit Quote $y_i : x_i$) jeweils darauf setzen, dass das Team i nicht Meister wird. Für welche Wettquoten aus iii) wird das Verlustrisiko für das Wettbüro gegenüber dem Spekulanten minimal?
 - v) Für welche Quoten wie aus iii) existieren Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$ derart, dass \mathbb{P}^* risikoneutrales Maß für $(\bar{\pi}, \bar{S})$ ist?
Ist der Markt vollständig? Ist der Markt nicht-redundant?

²nachdem die Wettquoten bekanntgegeben worden sind

- 2) Sei $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ und sei \mathbb{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\mathbb{P}[i] > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Sei $\pi^0 = S^0 = 1$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ gebe es eine Aktie mit $\pi^i = 1$ und

$$S^i(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \omega = i, \\ 2 & \text{falls } \omega = i + 1, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass der Markt arbitragefrei ist für alle Strategien $\bar{\xi} = (\xi^0, \xi)$ mit $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi^i| < \infty$ und dass es trotzdem kein Martingalmaß gibt.

- 3) Auf (Ω, \mathcal{F}, P) sei ein Finanzmarkt gegeben, bestehend aus einem risikolosen Sparbuch $\pi^0 = S^0 = 1$ und einer Aktie $S = S^1$ mit $S = \pi^1 \exp(\sigma W - m)$, mit Parametern $\sigma > 0, m \in \mathbb{R}$, wobei $W \sim \mathcal{N}(0, 1)$ sei. Die Verteilung von $R := S/\pi^1$ heisst Lognormalverteilung; Wir schreiben $R \sim \log \mathcal{N}(-m, \sigma^2)$.
- i) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte f_R von R und berechnen Sie die Momente $E[R^p]$, $p > 0$.
 - ii) Sei g die strikt positive Dichtefunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf \mathbb{R}_+ . Zeigen Sie: Es gibt ein äquivalentes Maß $P^* \approx P$ unter welchem R die Dichtefunktion g hat.
 - iii) In welcher Beziehung muss m zu σ stehen, damit P ein äquivalentes Martingalmaß ist? Welche Bedingung muss die Dichtefunktion g erfüllen, damit P^* ein äquivalentes Martingalmaß ist?
- 4) Zeigen Sie: In einem arbitragefreien Marktmodell gilt für die Arbitragepreisgrenzen eines Contingent Claims C

$$\pi_{\inf}(C) = \inf_{\mathbb{P}^* \in \tilde{\mathcal{P}}} \mathbb{E}^*\left(\frac{C}{1+r}\right) \quad \text{und} \quad \pi_{\sup}(C) = \sup_{\mathbb{P}^* \in \tilde{\mathcal{P}}} \mathbb{E}^*\left(\frac{C}{1+r}\right),$$

d.h. die Menge der äquivalenten Martingalmaße \mathcal{P} kann durch die Menge der absolutstetigen Martingalmaße $\tilde{\mathcal{P}}$ ersetzt werden.

(this version: 15.11.16)

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
STOCHASTISCHE FINANZMATHEMATIK I

Serie 4

- 1)
 - i) Zeigen Sie, dass d mit $d(X, Y) = \mathbb{E}(|X - Y| \wedge 1)$ eine Metrik auf $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert, jedoch $\|\cdot\| := d(\cdot, 0)$ keine Norm ist.
 - ii) Beweisen Sie, dass diese Metrik die Topologie der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit in $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ induziert.
- 2) Sei X_n eine Folge in $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^d)$ mit $\liminf_{n \rightarrow \infty} |X_n| < \infty$.
 - i) Zeigen Sie, dass es i.A. keine Teilfolge $n_k \rightarrow \infty$ gibt, sodass $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ fast sicher konvergiert.
 - ii) Zeigen Sie, dass es ein $X \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^d)$ und eine strikt wachsende Folge (σ_m) \mathbb{N} -wertiger \mathcal{F} -messbarer Zufallsgrößen gibt, sodass

$$X_{\sigma_m(\omega)} \rightarrow X(\omega) \quad \text{für } \mathbb{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega.$$

- 3) In einer Aufgabe der vorigen Serie wurde gezeigt, dass es in dem dortigen Modell mit abzählbar unendlich vielen Assets keine Arbitragemöglichkeiten gibt, dass aber auch kein risikoneutrales Maß $P^* \approx P$ existiert. Zeigen Sie hierzu weiter:

Es existieren Portfolios der Form $\bar{\xi}_n = (\xi_n^0, \xi_n^1, \dots, \xi_n^n)$, ($n = 1, 2, \dots$) mit $\sum_{i=0}^n \xi_n^i \pi^i = 0$ und $V^n := \sum_{i=0}^n \xi_n^i S^i \geq -c$ für ein $c \in \mathbb{R}_+$, das nicht von n abhängt, so dass V^n P -stochastisch (sogar P -fast sicher) gegen eine Zufallsvariable V^∞ konvergiert, wobei gilt:

$$V^\infty \geq 0 \quad P\text{-fast sicher,} \quad P[V^\infty > 0] > 0.$$

In diesem Sinne gibt es also eine "asymptotische Arbitragemöglichkeit".

- 4) Zeigen Sie im gleichen Kontext wie dem der vorigen Aufgabestellung:
Existiert für ein Modell mit abzählbar vielen Wertpapieren ein risikoneutrales Maß $P^* \approx P$, so gibt es auch keine asymptotischen Arbitragemöglichkeiten.

(this version: 15.11.16)

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
 STOCHASTISCHE FINANZMATHEMATIK I

Serie 5

- 1) Zeigen Sie: Für eine Handelsstrategie $\bar{\xi}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent
- i) $\bar{\xi}$ ist selbstfinanzierend.
 - ii) $\bar{\xi}_t \cdot \bar{X}_t = \bar{\xi}_{t+1} \cdot \bar{X}_t$ für $t = 1, \dots, T-1$.
 - iii) $V_t = V_0 + G_t = \bar{\xi}_1 \cdot \bar{X}_0 + \sum_{k=1}^t \xi_k (X_k - X_{k-1})$ für alle t .

- 2) Zusätzlich zu den in der Vorlesung eingeführten Bezeichnungen V und G für den Wertprozeß bzw. den Gewinnprozeß aus einer Anlagestrategie $\bar{\xi}$ (führen wir noch den Kostenprozeß

$$C_t := V_t - G_t \quad (t = 0, \dots, T)$$

ein. Zeigen Sie:

- i) Für $t = 1, \dots, T$ gibt C_t in der Tat die in den Perioden $0, \dots, t-1$ aufgelaufenen (abdiskontierten) Kosten an. Wie ist C_0 zu interpretieren?
 - ii) Die Strategie $\bar{\xi}$ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn ihr Kostenprozeß konstant ist, d.h. falls $C_t = C_0$ P -fast sicher für $t = 0, \dots, T$.
- 3) Sei ein Finanzmarkt mit zwei Wertpapieren gegeben, deren Preise durch den an $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ adaptierten Prozeß $S = (S_t^0, S_t^1)_{0 \leq t \leq T}$ modelliert werden.

- i) Welche der folgenden Prozesse sind previsibel (d.h. vorhersehbar) bzw. im Allgemeinen nicht previsibel?

- a) $\xi = (I_{\{S_t^1 > S_0^1\}})_{1 \leq t \leq T}$.
- b) $(\xi_t)_{1 \leq t \leq T}$ mit $\xi_1 = 0$, $\xi_t = I_{\{S_{t-1}^1 > S_{t-2}^1\}}$ für $t \geq 2$.
- c) $\xi = (I_A I_{\{t > n_0\}})_{1 \leq t \leq T}$ mit $A \in \mathcal{F}_{n_0}$, $n_0 \in \{0, \dots, T\}$.
- d) $\xi = (I_{\{S_t^1 > S_{t-1}^1\}})_{1 \leq t \leq T}$.

- ii) Sei $S^0 \equiv 1$. Konstruieren Sie für die previsiblen Prozesse ξ aus i) eine selbstfinanzierende Strategie $\bar{\xi}$ mit $V_0 = 1$. Interpretieren Sie die risikolose Anlage S^0 als Bankkonto und die riskante Anlage S^1 als Aktie und beschreiben Sie kurz die jeweiligen Strategien in Worten.

4) Auf (Ω, \mathcal{F}, P) sei ein Finanzmarkt gegeben, bestehend aus einem risikolosen Sparbuch $\pi^0 = S^0 = 1$ und einer Aktie $S = S^1$ mit $S = \pi^1 \exp(\Sigma W - m)$, mit Parametern $\Sigma > 0, m \in \mathbb{R}$, wobei $W \sim \mathcal{N}(0, 1)$ sei. Die Verteilung von S heisst Lognormalverteilung; Wir schreiben $S \sim \log \mathcal{N}(-m, \Sigma^2)$.

i) Sei $m = m(\Sigma)$ so gewählt, dass P ein äquivalenten Martingalmaß ist. Berechnen Sie eine explizite Formel für den arbitragefreien Preis

$$\pi^C = \mathbb{E}[C]$$

einer Call-Option $C = (S - K)^+$ mit Ausübungskurs K .

ii) Welche Limites liefert diese Formel für $\Sigma \uparrow \infty$ bzw. $\Sigma \downarrow 0$?

iii) (*) Implementieren Sie Ihre Formel (z.B. in Mathematica, R oder Phyton) und generieren Sie den Graphen der Funktion $\mathbb{R}_+ \times (0, 1] \ni (\pi^1, T) \mapsto \pi^C(\pi^1, \Sigma = \sigma\sqrt{T})$ für Volatilitätsparameter $\sigma > 0$ (z.B. für $\sigma = 0.3, K = \pi = 100$). Welche Eigenschaften hat diese Funktion?

(this version: 15.11.16)

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
STOCHASTISCHE FINANZMATHEMATIK I

Serie 6 (in der Übung am 7.Dez. zu diskutieren)

- 1) In einem arbitragefreien Mehrperioden-Modell sei $C \in L_+^0(\mathcal{F}_T)$ ein replizierbarer Contingent Claim, d.h. es gibt eine selbstfinanzierende Strategie $\bar{\xi}$, deren Wertprozess V zur Fälligkeit T den Wert $V_T = H := C/S_T^0$ hat.
 - i) Zeigen Sie: Ein solcher Wertprozess ist eindeutig bestimmt, d.h. sind V und V' entsprechende Wertprozesse, so gilt $V_t = V'_t$ (f.s.) für jedes $t = 0, \dots, T$. Finden Sie eine Formel zur Berechnung von V_t , $t \leq T$.
 - ii) Seien $d \leq T$ und $S^i > 0 \forall i$. Zeigen Sie, dass

$$C := (S_T^0/S_d^0) \prod_{j=1}^d (S_j^j/S_{j-1}^j)$$

replizierbar ist und berechnen Sie das entsprechende V .

- 2) Seien $\Omega = \{-1, +1\}^T = \{\omega = (y_1, \dots, y_T) \mid y_i \in \{-1, +1\}, 1 \leq i \leq T\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $Y_t(\omega) = y_t$ und $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_1, \dots, Y_t)$ für $t = 1, \dots, T$, mit $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$.
Wir betrachten einen Mehrperioden-Modell mit einem riskanten Asset, dessen diskontierte Kursentwicklung $X = X^1 = S^1/S^0$ von der folgenden Form sei:

$$X_t = X_0 \exp \left(\sum_{k=1}^t (\sigma_k Y_k + m_k) \right), \quad t = 1, \dots, T,$$

mit einer Konstanten $X_0 > 0$ und previsible Prozessen $\sigma_t > 0$ und m_t , $t = 1, \dots, T$.

- i) Zeigen Sie: Das Modell ist arbitragefrei genau dann, wenn gilt $0 \leq |m_t| < \sigma_t$ ($t = 1, \dots, T$).
- ii) Zeigen Sie, dass es dann genau ein Martingalmaß P^* für den Prozess X gibt.
- iii) (*) Beweisen Sie, dass dann die Y_i , $i = 1, \dots, T$, auch unabhängig unter P^* sind, falls $t \mapsto m_t$ und $t \mapsto \sigma_t$ deterministisch sind (insbesondere also, falls $\sigma_t = \sigma$, $m_t = m$ für geeignete Konstanten $\sigma \in (0, \infty)$, $m \in \mathbb{R}$).

- 3) Wir betrachten weiter das Modell aus der vorigen Aufgabe, wobei (σ_t) , (m_t) derart seien, dass das Modell arbitragefrei ist.

Beweisen Sie direkt mit Hilfe der binären Struktur des Modells, dass jedes P^* -Martingal $(M_t)_{t=0,\dots,T}$ von der Form

$$M_t = M_0 + \sum_{k=1}^t \xi_k (X_k - X_{k-1}), \quad t = 1, \dots, T$$

ist, wobei der Prozess

$$\xi_k = \frac{M_k - M_{k-1}}{X_k - X_{k-1}}, \quad k = 1, \dots, T$$

previsibel ist.

- 4) Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) seien die Zufallsvariablen Z_t , $t = 1 \dots T$, unabhängig und identisch $N(0, 1)$ -verteilt, und sei $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_1, \dots, Z_t)$ ($t = 1, \dots, T$). Wir betrachten einen Markt mit einem riskanten Wertpapier $S = S^1$ mit der Preisentwicklung

$$S_0 = 1, \quad S_t = \exp \left(\sigma \sum_{k=1}^t Z_k + mt \right), \quad t = 1 \dots T,$$

für $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$, und einer risikofreien Anlage $B = S^0$ mit

$$B_t = e^{rt}, \quad t = 0 \dots T, \quad r \in \mathbb{R}.$$

$X_t = \frac{S_t}{B_t}$, $t = 0 \dots T$, bezeichne den diskontierten Preisprozess.

- i) Bestimmen Sie $\beta \in \mathbb{R}$ derart, dass das Maß P^* mit der Dichte

$$\frac{dP^*}{dP} = \exp \left(\beta \sum_{k=1}^T Z_k - \frac{1}{2} \beta^2 T \right)$$

ein äquivalentes Martingalmaß ist, welches die Unabhängigkeit der Z_k , $k = 1, \dots, T$, erhält.

- ii) Ist das hier betrachtete Modell vollständig?

(this version: 12.12.16)

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
STOCHASTISCHE FINANZMATHEMATIK I

Serie 7 (in der Übung am 14.Dez. zu diskutieren)

- 1) Sei \mathbb{Q} ein zu \mathbb{P} absolutstetiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, \mathbb{P})$. Sei Z die Radon-Nikodym Dichte von \mathbb{Q} bezüglich \mathbb{P} . Sei Z_t die Radon-Nikodym Dichte von $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}$ bezüglich $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$ für die Einschränkungen von \mathbb{Q} bzw. \mathbb{P} auf \mathcal{F}_t . Diesen Prozess (Z_t) nennt man Dichteprozess von \mathbb{Q} bzgl. \mathbb{P} , für die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$.

Beweisen Sie:

- i) $Z_t = E_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{F}_t]$, $0 \leq t \leq T$.
 - ii) Ein adaptierter Prozess (X_t) ist genau dann ein \mathbb{Q} -Martingal, falls der Prozess $(Z_t X_t)$ ein \mathbb{P} -Martingal ist.
 - iii) $\mathbb{Q}[Z_t > 0] = 1$ und der inverse Dichteprozess $(1/Z_t)_{t=0}^T$ ist ein \mathbb{Q} -Martingal. Falls \mathbb{Q} äquivalent zu \mathbb{P} ist, so ist $(1/Z_t)_{t=0}^T$ der Dichteprozess von \mathbb{P} bzgl. \mathbb{Q} .
- 2) Sei $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ ein äquivalentes Martingalmaß eines Mehrperioden-Modelles auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}^* \left(\frac{1}{S_T^0} \right) < \infty$ für das Numeraire $S^0 > 0$. Sei $N_t := S_t^0 \mathbb{E}^* \left(\frac{1}{S_T^0} | \mathcal{F}_t \right)$ ein Zero-Coupon-Bond (Nullkupon-Anleihe) und C ein Contingent Claim mit Fälligkeit T , dessen Forward-Preis $F_{t,T} \in L^0(\mathcal{F}_t)$ zur Zeit $t \leq T$ durch die Gleichung

$$\mathbb{E}^* \left(\frac{C - F_{t,T}}{S_T^0} | \mathcal{F}_t \right) = 0$$

gegeben sei. Zeigen Sie:

- i) Das durch $\frac{d\mathbb{P}^{*(N)}}{d\mathbb{P}^*} := \frac{1}{S_T^0 \mathbb{E}^*(1/S_T^0)}$ definierte Maß $\mathbb{P}^{*(N)}$ ist ein äquivalentes Martingalmaß bezüglich des Numeraires N für den erweiterten Markt (\bar{S}, N) .
- ii) Der Forward-Preis $F_{t,T}$ ist gegeben durch $F_{t,T} = \mathbb{E}^{*(N)}(C | \mathcal{F}_t)$.

- 3) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, $r \geq 0$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $S_0^1, S_0^2 > 0$, I_2 die 2×2 -Einheitsmatrix und $(B_k, W_k)_{1 \leq k \leq T}$ i.i.d. $\mathcal{N}(0, I_2)$ -verteilt unter $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$. Weiterhin sei $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_t := \sigma(W_1, \dots, W_t, B_1, \dots, B_t)$, $1 \leq t \leq T$. Wir betrachten das folgende Mehr-Perioden-Modell $S = (S^0, S^1, S^2)$ mit

$$\begin{aligned} S_t^0 &= (1+r)^t \\ S_t^1 &= S_0^1 \exp\left(\sigma_1 \sum_{k=1}^t (B_k - \frac{1}{2}\sigma_1)\right) S_t^0 \\ S_t^2 &= S_0^2 \exp\left(\sigma_2 \sum_{k=1}^t (\rho B_k + \sqrt{1-\rho^2} W_k - \frac{1}{2}\sigma_2)\right) S_t^0 \end{aligned}$$

für $0 \leq t \leq T$. Zeigen Sie nun:

- i) \mathbb{P}^* ist in \mathcal{P} , d.h. \mathbb{P}^* ist ein äquivalentes Martingalmaß bezüglich des Numeraires S^0 .
- ii) Für das 0-te bzw. das 2-ten Wertpapier sind die Quotienten von zukünftigen zu heutigen Preisen, diskontiert bezüglich des Numeraires S^1 ,

$$\frac{S_T^0/S_T^1}{S_0^0/S_0^1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{S_T^2/S_T^1}{S_0^2/S_0^1}$$

unter dem Martingalmaß $d\bar{\mathbb{P}}^* := \frac{X_T^1}{X_0^1} d\mathbb{P}^*$ Lognormal-verteilt, und bestimmen Sie die Parameter jener Lognormalverteilungen.

- 4) Berechnen Sie mithilfe eines Numerairewechsels im Rahmen der vorigen Aufgabe den arbitragefreien Preis $\mathbb{E}^*\left(\frac{(S_T^1 - S_T^2)^+}{S_T^0}\right)$ einer Austausch-Option.

(this version: 12.12.16)

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
STOCHASTISCHE FINANZMATHEMATIK I

Serie 8 (in der Übung am 4. Jan. zu diskutieren)

- 1) Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, und $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, \dots, 4$. Wir betrachten einen Finanzmarkt mit $T = 2$ Perioden und $1 + d = 2$ Assets, einem risikolosen Asset mit Preis $S_0^0 = 1, S_1^0 = 1, S_2^0 = 3/2$ und einem riskanten Asset (Aktie) mit Preisentwicklung $S = S^1$ der Form

$$S_0 = 5, \quad S_1(\omega_1) = S_1(\omega_2) = 8, \quad S_1(\omega_3) = S_1(\omega_4) = 4, \quad (1)$$

$$S_2(\omega_1) = 15, \quad S_2(\omega_2) = 9, \quad S_2(\omega_3) = 7.5, \quad S_2(\omega_4) = 3. \quad (2)$$

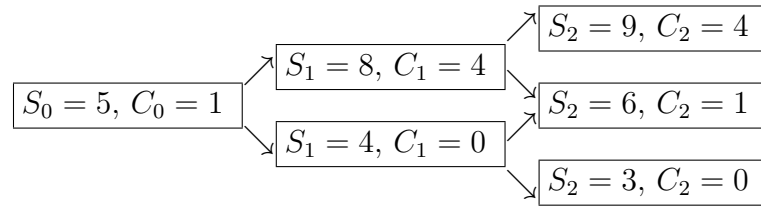
Die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2}$ sei von $\bar{S} = (S^0, S)$ erzeugt, d.h. $\mathcal{F}_t = \sigma(\bar{S}_k : 0 \leq k \leq t)$. Wir betrachten einen (europäischen) Contingent Claim mit Auszahlungsprofil

$$C = (K - \min(S_0, S_1, S_2))^+ \quad \text{mit } K = 5.$$

- i) Geben Sie \mathcal{F}_t ($t = 0, 1, 2$) explizit an.
 - ii) Berechnen Sie ein äquivalentes Martingalmaß $P^* \in \mathcal{P}$. Ist das Modell vollständig?
 - iii) Bestimmen Sie den Wertprozess V einer replizierenden Strategie $\bar{\xi}$ für C .
 - iv) Berechnen Sie den arbitragefreien Preis für C zur Zeit $t = 0$ sowie die Absicherungsstrategie $\bar{\xi}_1$ für die erste Periode $(0, 1]$.
- 2) Sie werfen wiederholt einen fairen Würfel. Nach jedem Wurf können Sie wählen, ob Sie die zuletzt geworfene Zahl als Betrag in Euro ausgezahlt bekommen oder weiterwürfeln. Die Anzahl Ihrer Würfe ist dabei auf maximal $n = 5$ beschränkt. Formulieren Sie dies als optimales Stoppproblem. Bestimmen Sie diejenige Stoppzeit, welche die erwartete Auszahlung maximiert, und berechnen Sie letztere. Wie groß müsste n sein, damit Sie nach dem ersten Wurf entscheiden weiterzuwürfeln, falls Sie dann nicht bereits eine Sechs haben?
- 3) Wir betrachten ein arbitragefreies Mehrperioden-Modell, bestehend aus einem wachsendem monotonen Bankkonto $S_t^0 = B_t$ und einem riskanten Wertpapier S_t sowie einer amerikanischen und europäischen Call Option C_{am}^{Call} und C_{eur}^{Call} auf S_t mit Ausübungspreis K und Fälligkeit T . Zeigen Sie, dass die arbitragefreien Preise von C_{am}^{Call} und C_{eur}^{Call} zu jedem Zeitpunkt übereinstimmen. Geben Sie explizit eine optimale Ausübungszeit τ an, welche $\mathbb{E}^*[H_\tau]$ für $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ maximiert.

(Hinweis: Sie können zur Lösung zudem annehmen, dass der Markt vollständig ist. Die Aussage gilt jedoch allgemein.)

- 4) Wir betrachten ein Finanzmarktmodell mit Zinssatz $r = 0$ und einer Aktie. Ihr Preisprozess S sowie das Auszahlungsprofil einer amerikanischen Option C sei gegeben durch



Dabei seien alle Übergangswahrscheinlichkeiten positiv unter \mathbb{P} .

- i) Berechnen Sie den in den verschiedenen Zeitpunkten mindestens benötigten Kapitalbedarf zur perfekten Absicherung der amerikanischen Option.
- ii) Bei Ausübung in welchen Knoten des obigen Graphen wird ein Käufer der amerikanischen Option dem Verkäufer einen risikofreien Gewinn ermöglichen?
- iii) Wann wird ein Käufer von seiner Option Gebrauch machen, wenn er alle möglichen Szenarien für gleichwahrscheinlich hält und die erwartete Auszahlung (unter P) maximiert? (Was könnte er sonst alternativ tun?)

(this version: 24.1.17)

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
STOCHASTISCHE FINANZMATHEMATIK I

Serie 9 (in der Übung am 11. Jan. zu diskutieren)

- 1) Im Binomialmodell mit Parametern $a < r < b$ sei $H_t = h_t(X_t)$ ($t = 0, \dots, T$) eine amerikanische Option und U die Snellsche Enveloppe zu H unter dem eindeutigen äquivalenten Martingalmaß P^* .

i) Man zeige: U ist von der Form

$$U_t = u_t(X_t), \quad t = 0, \dots, T,$$

wobei die Funktionen u_t durch die Rekursion

$$\begin{aligned} u_T(x) &= h_T(x), \\ u_t(x) &= h_t(x) \vee \left(u_{t+1} \left(x \frac{1+b}{1+r} \right) p^* + u_{t+1} \left(x \frac{1+a}{1+r} \right) (1-p^*) \right) \end{aligned}$$

bestimmt sind.

- ii) Seien nun speziell $a < 0$, $r > 0$ und H eine amerikanische Put-Option, also $h_t(x) = (K - x)^+ / (1+r)^t$ ($t = 0, \dots, T$). Zeigen Sie: Es gibt eine Schranke $x^* \in \left[\frac{K}{(1+b)^T}, \frac{K}{(1+a)^T} \right)$, so dass

$$\begin{aligned} u_0(x) &= (K - x)^+ && \text{für } x \leq x^*, \\ u_0(x) &> (K - x)^+ && \text{für } x^* < x < \frac{K}{(1+a)^T}, \\ u_0(x) &= 0 && \text{sonst.} \end{aligned}$$

- 2) Sei Y_1, Y_2, \dots eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit $Y_t \geq 0$ und $E[Y_t] < \infty$ für alle $t \geq 1$. Für $0 < \beta < 1$ ist eine Stoppzeit τ mit $\tau < \infty$ P -f.s. gesucht, welche $E[\beta^\tau M_\tau]$ maximiert, wobei $M_t := \max(Y_1, \dots, Y_t)$, $t = 1, 2, \dots$. Finden Sie ein solches τ .

Hinweis: Sei a^* der kleinste Wert a mit $a \geq \beta E[\max(a, Y_1)]$. Setzen Sie $f(x) := \max(a^*, x)$, $\mathcal{F}_t := \sigma(Y_1, \dots, Y_t)$ und zeigen Sie:

- i) $U_t := \beta^t f(M_t)$ ($t = 1, 2, \dots$) ist ein Supermartingal bezüglich (\mathcal{F}_t) , und für $\tau^* := \min \{ t \geq 1 \mid Y_t \geq a^* \}$ ist der gestoppte Prozeß $(U_{\tau^* \wedge t})$ ein Martingal.
 ii) Für jede Stoppzeit τ mit $\tau < \infty$ P -f.s. gilt:

$$a^* = E[U_0] \geq E[U_\tau] \geq E[\beta^\tau M_\tau].$$

- iii) τ^* ist optimal, d.h. $a^* = E[\beta^{\tau^*} M_{\tau^*}]$.

- 3) Sei H ein positiver, adaptierter und integrierbarer Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0, \dots, T}, P)$. Zeigen Sie:

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} E[H_\tau] = \inf_{M \in \mathcal{H}_0^1} E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} (H_t - M_t) \right].$$

Dabei bezeichne \mathcal{T} die Menge aller Stoppzeiten mit Werten in $\{0, \dots, T\}$ und \mathcal{H}_0^1 die Menge aller Martingale M mit $M_0 = 0$.

- 4) i) Sei $Y = M - A$ die Doob-Meyer-Zerlegung bezüglich \mathbb{Q} eines adaptierten Prozesses Y mit $Y_t \in L^1(\mathbb{Q})$ ($t = 0, \dots, T$) und sei τ eine Stoppzeit. Zeigen Sie, dass $Y^\tau = M^\tau - A^\tau$ die Doob-Meyer-Zerlegung von Y^τ ist.
 ii) (*) Sei nun Y ein strikt positiver integrierbarer Prozess. Zeigen Sie: Es gibt eine eindeutige multiplikative Zerlegung $Y = M \cdot A$ derart, dass $M > 0$ ein Martingal und $A > 0$ ein previsibler Prozess ist und es gilt $M_0 = Y_0$, $A_0 = 1$.

(this version: 11.1.17)

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
STOCHASTISCHE FINANZMATHEMATIK I

Serie 10 (in der Übung am 22. Jan. zu diskutieren (verschoben vom Termin 18.1., wo eine VL stattfindet))

- 1) Lösen Sie die Aufgabe 1 von Serie 8 (mit den korrigierten neuen Zahlen).
- 2) Lösen Sie die Weihnachtsaufgabe. (Sie steht auf der Webseite für den Kurs.)
(*Extra: Finden Sie den Limes von X/N für $N \rightarrow \infty$; Wogegen konvergiert die Erfolgswahrscheinlichkeit die beste Wahl zu treffen also?)
- 3) Beweisen Sie die Aussage von Proposition 85 der Vorlesung:

Die replizierende Strategie $\bar{\xi} = (\xi^0, \xi)$ für einen Contingent Claim $H = h(S_0, \dots, S_T)$ im CRR-Modell erfüllt

$$\xi_t(\omega) = \Delta_t(S_0, S_1(\omega), \dots, S_{t-1}(\omega)),$$

wobei $\Delta_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = (1+r)^t \frac{v_t(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1}(1+b)) - v_t(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1}(1+a))}{(b-a)x_{t-1}}$

$$\text{und } v_t(x_0, \dots, x_t) = \mathbb{E}^* \left(\left(x_0, \dots, x_t, x_t \frac{S_1}{S_0}, \dots, x_t \frac{S_{T-t}}{S_0} \right) \right).$$

Zeigen Sie, dass $\Delta_t(x_0, \dots, x_{t-1})$ im Falle $H = h(S_T)$ nur von x_{t-1} abhängt und, falls h konvex ist, monoton wachsend in diesem Argument ist.

- 4) Der Black-Scholes Preis einer Call-Option C^{call} mit Ausübungskurs K und Fälligkeit $T > 0$ ist im Zeitpunkt $t \in [0, T)$ bei Aktienpreis $x > 0$ durch

$$v(x, T-t, \sigma, r, K) = x\Phi(d_+(x, T-t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-(x, T-t)).$$

gegeben. Hierbei bezeichnet $r \in \mathbb{R}$ die risikolose Zinsrate, $\sigma > 0$ die Volatilität der Aktie und $\tau = T-t$ die Zeit bis zur Fälligkeit. Die Funktionen d_+ und d_- sind gegeben durch

$$d_{\pm}(x, \tau) = \frac{\log \frac{x}{K} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

definiert.

- i) Recherieren (Literatur, Wikipedia...) und/oder berechnen Sie explizite Formeln für die Funktionen, welche (für den Call) die sogenannten "Greeks" (Sensitivitäten) Delta, Gamma, Rho, Vega und Theta beschreiben, welche für Hedging und Risikomanagement wichtig sind, und diskutieren/illustrieren Sie deren Abhängigkeit von den Argumenten (insbesondere von $x, \tau = T - t$), ihre finanzielle Bedeutung ...
- ii) Verifizieren Sie, daß v die partielle Differentialgleichung

$$\left[\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + rx \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \right] v(x, t) = rv(x, t) \quad \text{auf} \quad (0, \infty) \times (0, \infty)$$

löst und der Randbedingung $v(x, T - t) \rightarrow (x - K)^+$ für $t \rightarrow T$ genügt.

- 5) (**extra Programmieraufgabe, längerfristig bis 25.1.)

Schreiben Sie ein Programm (z.B. in Python, R, Matlab oder Mathematica), welches für das CRR-Modell die Preise und Hedgingstrategie (zur Zeit $t = 0$) berechnen kann. Diskutieren Sie Ihre Implementierung, und nach Möglichkeit auch die Erweiterung auf Amerikanische Optionen (Resultate für die Amerikanische Variante der Call bzw. Put Option bei ansonsten gleichen Parametern?), und untersuchen/illustrieren Sie weitergehende Fragen und Resultate aus der Vorlesung, z.B. Konvergenz gegen die Black-Scholes Preise... Ihr Programm soll für frei wählbare Parameter T, S_0^1, r, a, b insbesondere europäische Optionen arbitragefrei bewerten. Neben Optionen der Form $H = h(S_T^1)$ (wie z.B. europäische Vanilla Optionen) dabei auch jede europäische Option, deren Auszahlung sich allgemeiner als Funktion der gesamten Kursentwicklung $(S_0^1, S_1^1, \dots, S_T^1)$ schreiben lässt.

Zu präsentieren und abzugeben sind ein wohlstrukturierter und -dokumentierter Code und eine Dokumentation Ihrer Resultate, u.a. für die Beispiele:

- i) Sei $r = 0.05, a = -0.1, b = 0.2, T = 10$ und $S_0^1 = 100$. Zu berechnen sind die Optionenpreise folgender Optionen:
- europäischer Call* $H = (S_T^1 - K)^+$ mit Ausübungskurs $K = 120$,
 - europäischer Put* $H = (K - S_T^1)^+$ mit Ausübungskurs $K = 120$,
 - Bull-Spread* $H = (S_T^1 - K_d)^+ - (S_T^1 - K_u)^+$ mit unterem Ausübungskurs $K_d = 120$ und oberem Ausübungskurs $K_u = 160$,
 - Digital* $H = XI_{\{S_T^1 > L\}}$ zum Betrag $X = 100$ mit Auslösebedingung $S_T^1 > L$ zur Schranke $L = 60$.
 - Down-and-In-Call*³ mit $K = 120$ und $B = 150$.
- ii) Bewerten Sie den europäischen Call aus a) arbitragefrei im Zeitpunkt 0 für $r = 0.15$ bei ansonsten gleichen Parametern. Diskutieren Sie das Ergebnis im Vergleich zu a).

(this version: 11.1.17)

³D.h. Auszahlung (in T) ist diejenige eines Calls mit 'Strike' $K = 120$, falls S zwischenzeitlich (für mindestens ein t mit $0 \leq t \leq T$) kleiner (\leq) als eine Barriere $B = 150$ ist, und sonst Null.

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
STOCHASTISCHE FINANZMATHEMATIK I

Serie 11

- 1) Zeigen Sie, dass jeder stetige Pfad $A : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ von endlicher totaler Variation ($A \in \text{FV}$), die quadratische Variation Null hat: $\langle A \rangle_t = 0 \forall t \geq 0$.
- 2) Sei X ein stetiger reellwertiger Pfad mit stetiger quadratischer Variation $\langle X \rangle$ entlang einer festen, aufsteigenden (sich verfeinernden) Folge (π_n) von Zerlegungen. Zeigen Sie, dass für $f \in C^1(\mathbb{R})$ und für $\alpha \in [0, 1]$ das α -Integral

$$\alpha\text{-}\int_0^t f(X_s) dX_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \pi_n, t_i \leq t} f(X_{t_i} + \alpha(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

existiert, und dass gilt

$$\alpha\text{-}\int_0^t f(X_s) dX_s = \int_0^t f(X_s) dX_s + \alpha \int_0^t f'(X_s) d\langle X \rangle_s.$$

Für welchen Wert von α entspricht das α -Integral dem Itô-Integral?

- 3) Sei $(W_t)_{0 \leq t \leq 1}$ ein typischer Pfad einer Brownsche Bewegung und $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Zerlegungen von $[0, 1]$ mit $|\pi_n| \rightarrow 0$.

Berechnen Sie zur Illustrierung der vorigen Aufgabe direkt (d.h. ohne Anwendung der Itô-Formel) für jedes $t \in [0, 1]$ und $\alpha \in [0, 1]$ das α -Integral

$$\alpha\text{-}\int_0^t W_s dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \pi_n, t_i \leq t} (W_{t_i} + \alpha(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \quad P\text{-f.s.}$$

4) Seien a, σ, x_0 Parameter in \mathbb{R} .

Sei $t \rightarrow W_t, t \geq 0$, ein 'typischer' Pfad der Brownschen Bewegung, also eine stetige Funktion mit $W_0 = 0$ und quadratischer Variation $\langle W \rangle_t = t, t \geq 0$.

Finden Sie ein $X = (X_t)_{t \geq 0}$, welches die stochastische Differentialgleichung (SDE)

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dW_t, \quad t \geq 0,$$

mit Anfangsbedingung $X_0 = x_0$ löst.

Hinweis: Leiten Sie zunächst eine SDE $dY_t = \dots$ für $Y_t = e^{at}X_t$ her.

(this version: 13.1.2017)

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
STOCHASTISCHE FINANZMATHEMATIK I

Serie 12

- 1) Wir betrachten das Bachelier-Modell mit Zinssatz $r = 0$, (diskontiertem) Aktienkurs $X_t = X_0 + mt + \sigma W_t$ ($t \geq 0$) mit $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ und (brownscher) Filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \leq t) = \sigma(X_s : s \leq t)$.

- i) Berechnen Sie möglichst explizit für das in T fällige pfadabhängige Derivat mit Auszahlung $H := \int_0^T X_u^2 du$ den Wertprozess

$$V_t := E^*[H | \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T.$$

- ii) Beweisen Sie, dass es einen Integranden θ der Form $\theta_u = g(u, X_u)$ für eine zu bestimmende Funktion g gibt, so dass gilt

$$H = E^*[H | \mathcal{F}_t] + \int_t^T g(u, X_u) dX_u, \quad 0 \leq t \leq T.$$

- 2) Im Bachelier-Modell $dX_t = \sigma dW_t + m dt$ ($t \in [0, T]$) für den Kursverlauf einer Aktie betrachten wir eine Call Option mit Auszahlung $H = (X_T - K)^+$. Sowohl der Kursverlauf als auch die Auszahlung seien bereits in diskontierten Einheiten gegeben.

Bestimmen Sie explizit den arbitragefreien Preisprozess sowie die dynamische Absicherungsstrategie (Hedgingstrategie) für die Call-Option mittels der Verteilungsfunktion Φ und Dichte φ der Standardnormalverteilung.

- 3) Sei W eine brownsche Bewegung. Zeigen Sie: Der Prozess

$$S_t = S_0 \exp \left(\int_0^t \sigma(u) dW_u + \int_0^t r(u) + m(u) du \right)$$

mit $S_0 \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $\sigma(\cdot) \in C^0([0, \infty), \mathbb{R}_+)$ und $\mu(\cdot), r(\cdot) \in C^0([0, \infty), \mathbb{R})$ löst eine SDE der Form $dS_t = \alpha(t, S_t) dt + \beta(t, S_t) dW_t$, $t \geq 0$. Berechnen Sie die Koeffizientenfunktionen α, β . Unter welchen Parameterkonstellationen ist der Prozess

$$X_t := \exp \left(- \int_0^t r(u) du \right) S_t, \quad t \geq 0,$$

ein Martingal (bezüglich der brownschen Filtration)?

4) Sei W ein typischer Pfad einer Brownschen Bewegung

- i) Seien $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Finden Sie eine explizite Lösung der Form $X_t = F(t, W_t)$, welche die stochastische Differentialgleichung (SDE)

$$dX_t = (mX_t + n)dW_t$$

mit Startwert $X_0 = x_0$ löst.

- ii) (*) Seien a, b in $C^1([0, \infty), \mathbb{R})$ mit $a(0) = 1$ und $a(t) > 0, t \geq 0$. Zeigen Sie: Der Prozess $X_t := a(t) \left(x_0 + \int_0^t b(u) dW_u \right), t \geq 0$, ist eine Lösung der SDE

$$dX_t = \frac{a'(t)}{a(t)} X_t dt + a(t)b(t) dW_t \quad \text{mit } X_0 = x_0.$$

(this version: 25. Januar 2017)

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
 STOCHASTISCHE FINANZMATHEMATIK I

Serie 13 (Zusatzserie)

- 1) Der Black-Scholes Preis einer Call-Option C^{call} mit Ausübungskurs K und Fälligkeit $T > 0$ ist im Zeitpunkt $t \in [0, T)$ bei Aktienpreis $S_t > 0$ durch die *Black-Scholes-Formel* für $\pi_t(C^{call}) = v(S_t, T - t, \sigma, r, K)$ gegeben:

$$v(x, T - t, \sigma, r, K) = x\Phi(d_+(x, T - t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-(x, T - t)).$$

Hierbei bezeichnet $r \in \mathbb{R}$ die risikolose Zinsrate, $\sigma > 0$ die Volatilität der Aktie und $\tau = T - t$ die Zeit bis zur Fälligkeit. Die Funktionen d_+ und d_- sind gegeben durch

$$d_{\pm}(x, \tau) = \frac{\log \frac{x}{K} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Für einen gegebenen Preis $\pi = \pi_t(C^{call})$ einer Call-Option und bei gegebenen Werten für $S_t, T - t, r, K$ zu einem Zeitpunkt $t < T$ ist die *implizite Volatilität* der Option definiert als Lösung $\sigma^{im} > 0$ der Gleichung $\Pi(S_t, T - t, \sigma^{im}, r, K) = \pi$, wobei

$$\Pi(x, T - t, \sigma, r, K) = x\Phi(d_+(x, T - t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-(x, T - t)).$$

- i) (*) Zeigen Sie, dass für jeden Optionspreis π mit

$$(S_t - K \exp(-r(T - t)))^+ < \pi < S_t$$

die implizite Volatilität $\sigma^{im} > 0$ eindeutig definiert ist.

- ii) (*) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \sigma^2} = \frac{T - t}{4\sigma^3}(\hat{\sigma}^4 - \sigma^4) \frac{\partial v}{\partial \sigma}, \text{ wobei } \hat{\sigma} := \sqrt{2 \left| \frac{\log \frac{x}{K} + r(T - t)}{T - t} \right|}.$$

- iii) Beweisen Sie, dass das newtonsche Iterations-Verfahren zur numerischen Berechnung der impliziten Volatilität mit quadratischer Ordnung und monoton konvergiert, wenn man die Iteration bei $\sigma_0 = \hat{\sigma}$ startet.

- 2) Gegeben seien $r = 0$ (bzw. diskontierte Preise), $\sigma > 0, t = 0$ und $\tau = T - t = T > 0$ (Zeit bis zur Fälligkeit) sowie $X_0 > 0$ als aktueller Preis der Aktie. Wir wollen in dieser Aufgabe das Black Scholes Model $dX_t = X_t \sigma dW_t^*$ und das Bachelier Model in der Parametrisierung⁴ $dX_t = X_0 \sigma dW_t^*$ vergleichen.

⁴Achtung: Wir benutzen für das Bachelier Model in dieser Aufgabe eine andere Parametrisierung als in der Vorlesung, welche für den Vergleich mit dem Black Scholes Model adäquater ist: Dem Sigma der Vorlesung entspricht hier $X_0 \sigma$.

- i) Definieren Sie analog zur implizite Volatilität σ_{BS}^{im} für das Black-Scholes Model diejenige σ_B^{im} für das Bachelier Model (für at-the-money Call Optionen).
- ii) Zeigen Sie, dass für at-the-money Call Optionen mit Ausübungskurs (Strike) $K = X_0$ die implizite Bachelier Volatilität $\sigma_B^{im}(\pi)$ eines Optionspreises $\pi > 0$ in geschlossener Form als Funktion von π angegeben werden kann.
- iii) Für festes $\pi \in (0, X_0)$ als Preis einer at-the-money Call Option seien $\sigma_{BS}^{im}(\pi)$ und $\sigma_B^{im}(\pi)$ die jeweiligen impliziten Volatilitäten. Beweisen Sie

$$0 \leq \sigma_{BS}^{im} - \sigma_B^{im} \leq \frac{T}{24}(\sigma_{BS}^{im})^3.$$

- iv) (*) Seien nun π_{BS} und π_B die Preise einer at-the-money Call Option mit Strike $K = X_0$ in dem jeweiligen Model. Zeigen Sie, dass

$$0 \leq \pi_B - \pi_{BS} \leq const(X_0)(\sigma\sqrt{T})^3 = \mathcal{O}((\sigma\sqrt{T})^3)$$

gilt und bestimmen Sie die Konstante.

- 3) Sei $t \rightarrow S_t(\omega) > 0$ eine stetige Funktion mit stetiger quadratischer Variation $\langle S \rangle_t(\omega)$ ($t \geq 0$), welche die (positive) Preisentwicklung eines liquiden Wertpapiers in Abhängigkeit vom Szenario $\omega \in \Omega_0$ beschreibt.

Zeigen Sie, dass für eine Funktion $h \in C^2(\mathbb{R}_+)$ gilt: Für alle ω ist

$$h(S_T) = h(S_0) + h'(S_0)(S_T - S_0) + \int_{S_0}^{\infty} (S_T - K)^+ h''(K) dK + \int_0^{S_0} (K - S_T)^+ h''(K) dK$$

Zeigen Sie; Für einen *Variance Swap*⁵ mit Auszahlung $H := \langle \log S \rangle_T$ in T gilt, dass

$$H = \int_0^T \vartheta_t dS_t + 2 \log S_0 - 2 \log S_T$$

für ein geeignete Strategie ϑ . Finden Sie damit heraus, in welcher Weise H durch eine dynamische Handelstrategie ϑ in S , eine geeignete Cash-Position und eine statische Position in Standard (*Vanilla*) Call- und Put-Optionen mit Fälligkeit T und verschiedenen Ausübungskursen K (*Strikes*) repliziert (gehedged) werden kann.

- 4) i) Benutzen Sie das Resultat von Aufgabe 4) von Serie 12, um eine Lösung für die SDE $dX_t = -\frac{X_t}{1-t} dt + dW_t$ mit Startwert $X_0 = 0$ auf dem Zeitintervall $t \in [0, 1)$ zu konstruieren, welche als Itô-Integral geschrieben werden kann.
- ii) Zeigen Sie, dass X fast-sicher stetig nach $t = 1$ fortgesetzt werden kann - nämlich wie ? (Hinweis: Kolmogorov-Chentsov)

(this version: 25. Januar 2017)

⁵Dies ist ein Derivat, welches es zum Ziel hat, realisierte (kumulative, quadrierte) Volatilität handelbar zu machen, vgl. z.B. G.S.-Research Note 1999, Derman et al: More than you ever wanted to know about about volatility swaps.