Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – Wintersemester 2019/20
F. Betrand, S. Puttkammer 13.11.2019

Serie 5 **Diskussion am 22.11.2019**

Aufgabe 1 (Taylor-Verfahren). Die zeitabhängige Population y_1 von Mäusen und y_2 von Katzen in Berlin soll durch das Räuber-Beute-Modell nach Lotka und Volterra beschrieben werden

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a y_1(t)\,(1 - y_2(t)) \\ -c y_2(t)\,(1 - y_1(t)) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es beschreibt den direkten Zusammenhang, dass die Anzahl der Mäuse fällt, wenn es zu viele Katzen gibt, und dass die Anzahl der Katzen fällt, wenn es zu wenig Mäuse gibt. Das Verhältnis werde beschrieben durch die Konstanten $a = 2$ und $c = 1$. Geben Sie das Taylor-Verfahren der Ordnung $p = 3$ für dieses Anfangswertproblem explizit an
Hinweis: Achten Sie auf die korrekte Anwendung der Ketten- und Produktregel im $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2 (Wiederholung: Konsistenzordnung von Runge-Kutta-Verfahrens). Ein Einschrittverfahren sei gegeben durch folgendes Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

Vgl. Heun, *Neue Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer unabhängigen Veränderlichen*, Zeitschr. für Math. u. Phys., 1900.
Geben Sie die Inkrementfunktion $\Phi(t, y, h)$ des Verfahrens an und bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens für hinreichend glatte f.

Aufgabe 3 (Wiederholung: Konsistenzordnung expliziter RK-Verfahren). Bestimmen Sie die maximale Konsistenzordnung der folgenden Runge-Kutta-Verfahren mit Hilfe der algebraischen Bedingungen aus den Übungen der letzten Woche.

(i)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

(ii) RK4

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

(iii) 3/8-Regel

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array}$$

Die Formeln und ihre Herleitung finden Sie in Theorem 1.6 bzw. Kapitel II.2 Hairer, Wanner, Nørsett, *Solving Ordinary Differential Equations I*, Springer Series in Computational Mathematics, 1993. Dieses Buch kann im Universitätsnetzwerk heruntergeladen werden.

Aufgabe 4 (Quadratur). Für $f \in C(I)$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$ soll das Anfangswertproblem $y'(t) = f(t)$, $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ integriert werden.
Zeigen Sie, dass jedes explizite s-stufige Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung $p = s$ mit der Eigenschaft

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad \text{für } i = 1, \dots, s$$

polynomielle $f \in P_{s-1}(I)$ exakt integriert.

Aufgabe 5 (Satellitenbahn im Erde-Mond-System; praktische Aufgabe). Lösen Sie das Anfangswertproblem aus Serie 1, Aufgabe 4 wie in Serie 4, Aufgabe 2, numerisch. Diesmal mit Hilfe des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens RK4 aus Aufgabe 3 (ii).

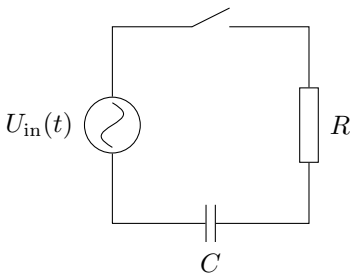
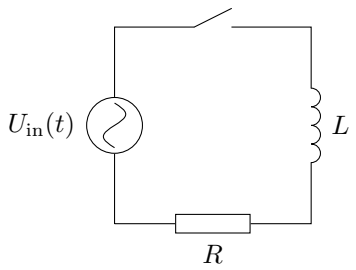
Aufgabe 6 (Wechselstrom; Modellierung). Zur Vereinfachung der Betrachtung von Wechselströmen wird ein komplexer Widerstand $Z = R + \mathrm{j}X$ eingeführt. Dieser wird *Impedanz* genannt. In der Elektrotechnik wird die imaginäre Einheit mit j bezeichnet, um Verwechslungen mit der Stromstärke zu vermeiden.
Für kosinusförmige Spannung $\widetilde{U}(t) = U_0 \cos(\omega t)$ und Stromstärke $\widetilde{I}(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ mit Frequenz ω und Phasenwinkel φ werden die komplexen Funktionen $U(t) = U_0 \exp(\mathrm{j}\omega t)$ und $I(t) = I_0 \exp(\mathrm{j}\omega t + \mathrm{j}\varphi)$ betrachtet, sodass $\widetilde{I} = \operatorname{Re} I$ und $\widetilde{U} = \operatorname{Re} U$. Es gilt dann das *ohmsche Gesetz der Wechselstromtechnik*

$$Z = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0}{I_0} e^{-\mathrm{j}\varphi} = \text{const.}$$

(a) Leiten Sie aus den bekannten Gleichungen

$$U_\mathrm{R}(t) = R\, I_\mathrm{R}(t), \quad I_\mathrm{C}(t) = C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_\mathrm{C}(t) \quad \text{und} \quad U_\mathrm{L}(t) = L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_\mathrm{L}(t)$$

an Ohm'schen Wiederständen, Kondensatoren und Spulen die folgenden komplexen Zusammenhänge her

$$Z_\mathrm{R} = R, \quad Z_\mathrm{C} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \quad \text{und} \quad Z_\mathrm{L} = \mathrm{j}\omega L.$$

Beschreiben Sie die Multiplikation mit $\pm\mathrm{j} = \exp(\pm\mathrm{j}\pi/2)$ als Phasenverschiebung.
(b) Beschreiben Sie die Modelle der RC- und RL-Schaltung mit Wechselspannungsquelle $\widetilde{U}_\mathrm{in}(t) = U_0 \cos(\omega t)$ wie in Serie 2, Aufgabe 4 und Serie 4, Aufgabe 4.