Serie 6 **Diskussion am 29.11.2019**

Aufgabe 1 (Extrapolation). Gegeben sei eine Funktion $a \in C([0,\infty))$ mit asymptotischer Entwicklung

$$a(h) = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i h^{pi} + a_{m+1}(h)\, h^{p(m+1)}$$

für ein $p > 0$ und $a_{m+1} = a_{m+1} + o(1)$ für $h \to 0$. Sei $(h_k \ : \ k \in \mathbb{N}_0)$ eine monoton fallende Folge mit $0 < h_k$ und

$$0 < \frac{h_{k+1}}{h_k} \leq \varrho < 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

(a) Zeigen Sie, dass für das Interpolationspolynom $p_{k,m} \in P_m([0,\infty))$ durch die Punkte $(h_{k-m}^p, a(h_{k-m}))$, …, $(h_k^p, a(h_k))$ gilt

$$a(0) - p_{k,m}(0) = \mathcal{O}(h_{k-m}^{p(m+1)}) \quad \text{für } k \to \infty.$$

Hinweis: Untersuchen Sie das Interpolationspolynom in der Lagrangeschen Darstellung und zeigen Sie mit Hilfe der Interpolationsfehlerdarstellung

$$\sum_{i=0}^{m} z_i^\ell L_i^{(m)}(0) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \ell = 0, \\ 0, & \text{falls } \ell = 1, \dots, m, \\ (-1)^m \prod_{j=0}^{m} z_j, & \text{falls } \ell = m+1. \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie, dass $p_{k,m}(0) = a_{k,m}$ rekursiv ausgewertet werden kann durch die Formel

$$a_{i,0} = a(h_i), \quad a_{i,\ell} = a_{i,\ell-1} + \frac{a_{i,\ell-1} - a_{i-1,\ell-1}}{\left(\frac{h_{i-\ell}}{h_i}\right)^p - 1}, \quad \text{für } \ell = i, i+1, \dots \text{ und } i \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis: Die Behauptung folgt direkt aus der Nevilleschen Rekursionsformel zur Auswertung des Interpolationspolynoms, die Sie verwenden dürfen.
(c) *Zusatz:* Beschreiben Sie das Quadraturverfahren nach Romberg als weiteres Beispiel für eine Anwendung des Prinzips der Extrapolation.

Aufgabe 2 (Extrapolationsverfahren). Bei Extrapolation von Runge-Kutta-Verfahren entstehen wieder Runge-Kutta-Verfahren mit höherer Stufenzahl und höherer Ordnung. Führen Sie bei dem Verfahren

$$\begin{array}{c|c} c_i & a_{ij} \\ \hline & b_j \end{array} \quad i, j = 1, \dots, s$$

einen Extrapolationsschritt zu $h_0 = h$ und $h_1 = h/2$ durch und berechnen das Butcher-Tableau des resultierenden Verfahrens. Welche Verfahren ergeben sich für das explizite und implizite Euler-Verfahren bzw. die Mittelpunktsregel?

Aufgabe 3 (Implizite RK-Verfahren). Betrachten Sie das implizite 2-stufige Runge-Kutta-Verfahren mit dem Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

sowie das Verfahren

$$Y_1 = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, Y_1) - f(t_{n+1}, Y_2)), \quad Y_2 = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, Y_1) + f(t_{n+1}, Y_2)), \quad y_{n+1} = Y_2.$$

(a) Zeigen Sie, dass die beiden Verfahren für das Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ dieselben Werte y_n liefern.
(b) Lässt sich jedes s-stufige Runge-Kutta-Verfahren mit Ordnung $p \geq 1$ in der Form

$$Y_i = y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_n + c_j h, Y_j), \quad i = 1, \ldots, s, \qquad y_{n+1} = Y_s$$

schreiben? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (Quadratur). Für $f \in C(I)$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$ soll das Anfangswertproblem $y'(t) = f(t)$, $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ integriert werden.
Zeigen Sie, dass das implizite Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} \frac{3-\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{3-2\sqrt{3}}{12} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{3+2\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

für $f \in C(I)$ die Gauß-Quadraturformel liefert.