Lagrange-Formalismus und Eichtheorie

Carsten Falk

19. April 2010

Dieser Text behandelt die Eichtheorie im Zusammenhang mit dem Lagrange-Formalismus auf Vektorbündeln und ist noch "**unter Konstruktion**". Als differenzialgeometrische Grundlage dient hierbei das Lehrbuch von Prof. Helga Baum "Eichfeldtheorie: Eine Einführung in die Differentialgeometrie auf Faserbündeln" [Baum(2009)]. Inhaltlich hält es sich an das Buch "Gauge-Theory and Variational Principles" von David Bleecker [Bleecker(1981)] und stellt bis jetzt eine Umformulierung der Kapitel 4 und 5 dar.

Der Abschnitt 1.1. und damit das Fundament für alles Folgende beruht auf Ausarbeitungen von Rainer Mühlhoff.

Inhaltsverzeichnis

1 Die homogenen Lagrange-Gleichungen **2**

1.1 Lagrangedichte und Variationsableitungen 2

1.2 Das duale Kodifferential δ^* 3

1.3 Lagrange-Gleichungen 5

2 Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung **5**

2.1 Die Klein-Gordon-Gleichung. 5

2.2 Die Dirac-Gleichung 6

3 Eichtheorie und die inhomogenen Lagrange-Gleichungen **8**

3.1 Satz von Noether 9

3.2 Eichinvarianz 10

3.3 Die Eich-Algebra 12

3.4 Der Strom als Erhaltungsgröße 14

3.5 Die inhomogenen Lagrange-Gleichungen 15

1 Die homogenen Lagrange-Gleichungen

In diesem Kapitel betrachten wir ein Vektorbündel $(E, \langle,\rangle_E \pi, M)$ vom Rang m mit Bündelmetrik $\langle,\rangle_E$ und metrischer kovarianter Ableitung ∇^E über einer pseudo-RMF (M, g) ohne Rand.

1.1 Lagrangedichte und Variationsableitungen

Gegenstand unser Untersuchung ist ein Wirkungsfunktional

$$\mathcal{S}_U(\psi) = \int_U \mathcal{L}(\psi)\, dM_g$$

auf den Schnitten $\Gamma(E)$ von E und einer offenen und präkompakten Menge $U \subset M$. Dabei soll $\mathcal{L}(\psi) \in C^\infty(M)$ an einer Stelle $x \in M$ nur von $\psi(x) \in E$ und den ersten Ableitungen

$$(\nabla\psi)(x) \in \Lambda^1(M, E)_x = \{\omega_x : T_xM \to E_x \mid \omega_x \text{ linear}\} \simeq (T^*M \otimes E)_x$$

abhängen. Eine solche Abbildung $\mathcal{L} : \Gamma(E) \to C^\infty(M)$ wollen wir *Lagrange-Dichte* nennen. Nach Voraussetzung existiert zu jeder Lagrange-Dichte eine *Lagrange-Funktion*

$$L : J^1(E) = E \oplus \Lambda^1(M, E) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

mit $\mathcal{L}(\psi)(x) = L(\psi(x), (\nabla\psi)(x))$.

Im Folgenden wollen wir ein Kriterium entwickeln, wann ein Schnitt $\psi \in \Gamma(E)$ bezüglich $\mathcal{S}_U$ für alle offenen und präkompakten $U \subset M$ stationär wird.

Definition 1. Ein Schnitt $\psi \in \Gamma(E)$ heißt *stationär bezüglich* $\mathcal{S}_U$, falls

$$\frac{d}{dt}\mathcal{S}_U(\psi + t\phi)\mid_{t=0} = 0$$

für alle $\phi \in \Gamma(E)$ mit gilt.

Dazu bedienen wir uns der Lagrange-Funktion und definieren

$$\begin{array}{rcl} \partial_1 L : J^1(E)_x & \longrightarrow & E_x^* \\ (s, \omega) & \longmapsto & \left(h \mapsto \frac{d}{dt}L(s + th, \omega)\mid_{t=0} \in \mathbb{R}\right) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \partial_2 L : J^1(E)_x & \longrightarrow & \Lambda^1(M, E)_x^* \\ (s, \omega) & \longmapsto & \left(\sigma \mapsto \frac{d}{dt}L\left(s, \omega + t\sigma\right)\mid_{t=0} \in \mathbb{R}\right) \end{array}$$

welche offenbar fasertreue Abbildungen $\partial_1 L : J^1(E) \to E^*$ und $\partial_2 L : J^1(E) \to \Lambda^1(M, E)^*$ definieren.

Definition 2. Für eine Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ zur Lagrange-Funktion L und einen Schnitt $\psi \in \Gamma(E)$ sei

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \partial_1 L(\psi, \nabla\psi) \in \Gamma(E^*)$$

die " *Variationsableitung von $\mathcal{L}$ in ψ*" und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)} := \partial_2 L(\psi, \nabla\psi) \in \Omega^1(M, E)^*.$$

die " *Variationsableitung von $\mathcal{L}$ in $\nabla\psi$*".

Remark. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}$ und $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)}$ sollten trotz der Schreibweise nicht als Richtungsableitung verstanden werden. Jedoch kann man für ein $\phi \in \Gamma(E)$ den Ausdruck $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}(\phi) \in C^\infty(M)$ als *Richtungsableitung* von $\mathcal{L}(\psi) \in C^\infty(M)$ in Richtung ϕ und $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\psi}(\nabla\phi) \in C^\infty(M)$ als Richtungsableitung von $\mathcal{L}(\psi)$ in Richtung $\nabla\phi$ auffassen.

Schließlich sei noch bemerkt, dass hierbei durch $\Omega^1(M, E) \simeq \Gamma(TM^* \otimes E)$ das duale Bündel $\Omega^1(M, E)^*$ als $\Gamma(TM \otimes E^*)$ interpretiert wird. Für den weiteren Weg, brauchen wir die folgende Eigenschaft:

Lemma 3. *In dem obigen Setting gilt*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{S}_U(\psi + t\phi) \mid_{t=0} = \int_U \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}(\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\psi}(\nabla\phi)\, dM_g \tag{1.1}$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mid_{t=0} \mathcal{S}_U(\psi + t\phi) &= \int_U \frac{d}{dt} \mid_{t=0} \mathcal{L}(\psi + t\phi)\, dM_g \\ &= \int_U \frac{d}{dt} \mid_{t=0} L(\psi + t\phi, \nabla\psi) + \frac{d}{dt} \mid_{t=0} L(\psi, \nabla\psi + t\nabla\phi)\, dM_g \end{aligned}$$

□

1.2 Das duale Kodifferential δ^*

Für zwei Schnitte $\phi, \psi \in \Gamma(E)$ betrachte man die Richtungsableitung $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\psi}(\nabla\phi) \in C^\infty(M)$ von $\mathcal{L}(\psi)$ in Richtung $\nabla\phi$. Ziel dieses Abschnittes ist es, ein kanonisches Kodifferenzial $\delta^* : \Gamma(TM \otimes E^*) \to \Gamma(E^*)$ zu definieren und die Funktion $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\psi}(\nabla\phi)$ in Bezug zu der Funktion $\delta^*(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\psi})(\phi)$ zu stellen. Wir werden sehen, dass sich beide nur bis auf die Divergenz eines durch $\mathcal{L}$, ψ und ϕ eindeutig bestimmten Vektorfeldes auf M unterscheiden. Zunächst eine Erinnerung: Durch

$$\nabla_X^{T^*M \otimes E}(\sigma \otimes e) := \nabla_X^{T^*M}\sigma \otimes e + \sigma \otimes \nabla_X^E e$$

ist eine kovariante Ableitung auf $\Gamma(T^*M \otimes E)$ gegeben. Damit ist

$$\delta\omega := -\sum_i \epsilon_i(\nabla_{e_i}^{T^*M \otimes E}\omega)(e_i) \in \Gamma(E) \quad \{e_i\} - ONB \tag{1.2}$$

das Kodifferenzial $\delta : \Gamma(T^*M \otimes E) \to \Gamma(E)$ zu ∇^E.

Remark. Explizit gilt für $\omega = \sigma \otimes e$

$$\begin{aligned} \delta\omega &= -\sum \epsilon_i \left(\nabla^{T^*M}_{e_i}\sigma\right)(e_i) \cdot e - \sum \epsilon_i(\sigma(e_i) \cdot \nabla^E_{e_i} e). && (1.3) \\ &= \delta\sigma \cdot e - \nabla^E_{\sigma^\sharp} e && (1.4) \end{aligned}$$

Im Folgenden sei

$$\begin{aligned} {}^* : \Gamma(T^*M \otimes E) &\to \Gamma(TM \otimes E^*) \\ \omega &\mapsto \langle \omega, \quad \rangle_{T^*M \otimes E} \,. \end{aligned}$$

der durch die Metriken auf $T^*M \otimes E$ gegebenen kanonische Isomorphismus.

Definition. Das duale Kodifferenzial δ^* sei durch

$$\begin{aligned} \delta^* : \Gamma(TM \otimes E^*) &\longrightarrow \Gamma(E^*) \\ \xi^* &\longmapsto (\delta\xi)^* \end{aligned}$$

gegeben. Darüber hinaus sei

$$\begin{aligned} \lrcorner : \Gamma(E) \times \Gamma(TM \otimes E^*) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ (e, X \otimes u) &\longmapsto s \lrcorner \xi^* := u(s) \cdot X. \end{aligned}$$

Lemma 4. *Mit der obigen Bezeichnung gilt*

$$(\delta^*\xi^*)(s) = -div(s \lrcorner \xi^*) + \xi^*(\nabla^E s). \qquad (1.5)$$

Beweis. Es sei $\xi^* = X \otimes u = \Gamma(TM \otimes E^*)$, d.h. X ist ein Vektorfeld und u ein Schnitt in $\Gamma(E^*)$. Bezeichnen wir mit σ die zu X duale 1-Form und mit e den zu u dualen Schnitt in $\Gamma(E)$, sodass $\xi = \sigma \otimes e$, dann gilt für jedes $s \in \Gamma(E)$

$$\begin{aligned} (\delta^*\xi^*)(s) &= \langle \delta\xi, s \rangle_E \\ &\overset{(1.4)}{=} \delta\sigma \, \langle e, s \rangle_E - \left\langle \nabla^E_X e, s \right\rangle_E \\ &\overset{Metr.}{=} \delta\sigma \, \langle e, s \rangle_E - \left(X(\langle e, s \rangle_E) - \left\langle e, \nabla^E_X s \right\rangle_E \right) \\ &= -div(X) \, u(s) - X(u(s)) + u(\nabla^E_X s) \\ &= -div(u(s) \cdot X) + \xi^*(\nabla^E s), \end{aligned}$$

wobei $\xi^*(\nabla^E s) = (X \otimes u)(\nabla^E s) = u(\nabla^E_X s)$ und die Divergenzformel

$$div(u(s) \cdot X) \;=\; X(u(s)) + u(s)\, div(X)$$

benutzt wurde. Daraus folgt die Behauptung. □

1.3 Lagrange-Gleichungen

Die Formel (1.5) setzen wir nun in (1.1) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |_{t=0} \mathcal{S}_U(\psi + t\phi) \quad & \overset{(1.5)}{=} \quad \int_U \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}(\phi) + (\delta^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)})(\phi)\, dM_g \\ & \quad + \int_U div(\phi \lrcorner \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)}) dM_g \\ & \overset{\partial M = \emptyset, Stokes}{=} \quad \int_U \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}(\phi) + (\delta^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)})(\phi)\, dM_g \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar

Theorem 5. *ψ ist genau dann ein stationärer Punkt von $\mathcal{S}_U$ für alle offenen und prä-kompakten Teilmengen $U \subset M$, falls es die **Lagrange-Gleichungen***

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}(\phi) + \delta^* \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)} \right)(\phi) = 0 \tag{1.6}$$

für alle $\phi \in \Gamma(E)$ erfüllt.

2 Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung

2.1 Die Klein-Gordon-Gleichung.

Wir betrachten ein komplexes Vektorbündel E mit einer hermiteschen Form $h(,)$. Diese definiert eine quadratische Form bzw. durch Polarisierung ein Skalarprodukt $\langle , \rangle := Re\, h$. Das dadurch induzierte reelle Vektorbündel bezeichnen wir mit E. Für eine bezüglich $\langle , \rangle_E$ metrische kovariante Ableitung ∇^E betrachten wir die Lagrangedichte $\mathcal{L}$, welche durch die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L(\psi(x), \nabla\psi(x)) &= \frac{1}{2} \langle \nabla\psi, \nabla\psi \rangle_{T^*M \otimes E} - \frac{1}{2} m_0 \langle \psi, \psi \rangle_E \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla\psi\|^2 - \frac{1}{2} m_0 \|\psi\|^2 \end{aligned}$$

induziert wird. Für $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}(\phi)$ erhält man dann nach Definition

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_0 \langle \psi + t\phi, \psi + t\phi \rangle_E \right) |_{t=0} \quad = \quad m_0 \langle \psi, \phi \rangle_E$$

Analog folgt für $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)}(\nabla\phi)$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \langle \nabla(\psi + t\phi), \nabla(\psi + t\phi) \rangle_{T^*M \otimes E} \right) |_{t=0} \quad = \quad \langle \nabla\psi, \nabla\phi \rangle_{T^*M \otimes E}$$

Insbesondere ist damit $(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)})^* = \nabla\psi$ und

$$\delta^* \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)} \right)(\phi) \overset{Def.}{=} \langle \delta\nabla\psi, \phi \rangle_E .$$

Schaut man auf 1.2, so entspricht $\delta\nabla\psi$ per definitionem gerade dem Bochner-Laplace-Operator Δ^{∇^E} von ψ. Wir erhalten damit insgesamt die Lagrange-Gleichungen

$$\left\langle \Delta^{\nabla^E}\psi, \phi \right\rangle_E - m_0 \langle \psi, \phi \rangle_E = 0 \qquad \forall\phi$$

bzw.

$$\Delta^{\nabla^E}\psi = m_0\psi. \qquad (*)$$

Wählt man als komplexes Vektorbündel $E^{\mathbb{C}} = \mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{C}$ mit $h(\psi, \phi) = \overline{\psi} \cdot \phi$. Dann ist $E = \mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{R}^2$ und $\langle , \rangle_E$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Jeder Schnitt $\psi \in \Gamma(E)$ besteht aus zwei Komponenten (ψ_1, ψ_2), dem Real- bzw. dem Imaginärteil von $\psi \in \Gamma(E^{\mathbb{C}})$. Die kovariante Ableitung

$$\begin{aligned} d : \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(T^*\mathbb{R}^{1,3} \otimes E) \\ \psi &\longmapsto d\psi \end{aligned}$$

ist metrisch bezüglich $\langle , \rangle_E$. Es gilt nun $\Delta^{\nabla^E}\psi = \delta d\psi$ zu berechnen. Dies ist aber nichts anderes als der Laplace- bzw. d'Alambert-Operator $\Delta_{\mathbb{R}^{1,3}} = \Box$ der einzelnen Komponenten von ψ. D.h. wir erhalten für $(*)$ die Klein-Gordon-Gleichung

$$\Box\psi = m_0\psi.$$

2.2 Die Dirac-Gleichung

In diesem Abschnitt wollen wir die Dirac-Gleichung

$$D\psi = m_0\psi$$

auf dem Spinorbündel $(S, \nabla^S, \cdot, \langle , \rangle_S)$ einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) mit Spin-Struktur Q als Euler-Lagrange-Gleichungen darstellen.

Erinnerungen an das Spinorbündel. Das Spinorbündel besteht aus einem Vektorbündel S über (M, g) mit Bündelmetrik $\langle , \rangle_S$, einer Clifford-Multiplikation $\cdot : T_pM \times S_p \to S_p$ und kovarianter Ableitung ∇^S, welche die folgenden Eigenschaften erfüllen:

1. ∇^S ist metrisch bezüglich $\langle , \rangle_S$.
2. ∇^S ist verträglich mit der Clifford-Multiplikation, d.h. $\nabla^S_Y(X \cdot \psi) = (\nabla^{LC}_Y X) \cdot \psi + X \cdot \nabla^S_Y\psi$.
3. Die Clifford-Multiplikation ist verträglich mit $\langle , \rangle_S$, d.h. $\langle X_p \cdot \psi_p, \phi_p \rangle_S = - \langle \psi_p, X_p \cdot \phi_p \rangle_S$.

Insbesondere wird darauf durch

$$D : \Gamma(S) \stackrel{\nabla^S}{\to} \Gamma(T^*M \otimes S) \stackrel{g}{\to} \Gamma(TM \otimes S) \stackrel{\cdot}{\to} \Gamma(S)$$

der Dirac-Operator D definiert. Für diesen gilt bezüglich einem lokalen Schnitt $b : U \subset M \to \mathcal{Q}$, dessen Projektion auf das $O(p,q)$-Reperbündel wir ebenfalls mit $b = \{b_i\}$ bezeichnen wollen:

$$D\psi = \sum_i \epsilon_i b_i \cdot \nabla^S_{b_i} \psi.$$

Die Dirac-Lagrange-Dichte. Die Lagrange-Dichte für die Dirac-Gleichung lautet

$$\boxed{\mathcal{L}_D(\psi) = \frac{1}{2} \langle \psi, D\psi \rangle_S - \frac{1}{2} m_0 \langle \psi, \psi \rangle_S .} \tag{2.1}$$

Das folgende Lemma zeigt, dass diese in der Tat von einer Lagrange-Funktion kommt:

Lemma 6. *Für ein $\psi, \phi \in \Gamma(S)$ gilt in jedem Punkt $x \in M$*

$$\left\langle \omega_\psi, \nabla^S \phi \right\rangle_{T^*M \otimes S} = - \langle \psi, D\phi \rangle_S ,$$

dabei ist $\omega_\psi(X) := X \cdot \psi$.

Beweis. Es sei b ein lokaler Schnitt $b : U \to Q$. In diesem ist

$$\omega_\psi = \sum_i b_i^* \otimes (b_i \cdot \psi), \ \nabla^S \phi = \sum_j b_j^* \otimes \nabla^S_{b_j} \phi$$

und damit

$$\begin{aligned}
\left\langle \omega_\psi, \nabla^W \phi \right\rangle_{T^*M \otimes E} &= \sum_{i,j} \left\langle b_i^*, b_j^* \right\rangle_{T^*M} \cdot \left\langle b_i \cdot \psi, \nabla^S_{b_j} \phi \right\rangle_S \\
&= \sum_i \epsilon_i \left\langle b_i \cdot \psi, \nabla^E_{b_i} \phi \right\rangle_S \\
&= - \left\langle \psi, \sum_i \epsilon_i \nabla^S_{b_i} \phi \right\rangle_S \\
&= - \langle \psi, D\phi \rangle_S .
\end{aligned}$$

□

Für $(s, \sigma) \in J^1(S) = S \oplus \Lambda^1(M, S)$ ist damit

$$L(s, \sigma) := -\frac{1}{2} \langle \omega_s, \sigma \rangle_{T^*M \otimes S} - \frac{1}{2} m_0 \langle s, s \rangle_S .$$

die Lagrange-Funktion der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_D$.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen für $\mathcal{L}_D$. Es sei $x \in M$ fixiert. Wir berechnen zunächst $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}(\phi)$ und $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)}(\nabla\phi)$. Für ersteres ergibt sich in x

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}(\phi) &= \frac{d}{dt} L(\psi + t\phi, \nabla\psi) \mid_{t=0} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \langle \omega_{\psi+t\phi}, \nabla\psi\rangle_{T^*M\otimes E} \mid_{t=0} + \frac{1}{2} m_0 \frac{d}{dt} \langle \psi + t\phi, \psi + t\phi\rangle_E \mid_{t=0} \\
&= -\frac{1}{2} \langle \omega_\phi, \nabla\psi\rangle_{T^*M\otimes E} - \langle m_0\psi, \phi\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2} D\psi - m_0\psi, \phi \right\rangle.
\end{aligned}$$

Hierbei nutzt man $\omega_{\psi+t\phi} = \omega_\psi + t\,\omega_\phi$. Analog ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)}(\nabla\phi) = -\frac{1}{2} \langle \omega_\psi, \nabla\phi\rangle_{T^*M\otimes E}$$

und damit

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)}\right)^* = -\frac{1}{2}\omega_\psi.$$

Wir müssen nun das Kodifferenzial $\delta\omega_\psi$ berechnen. Dazu wählen wir uns einen x-synchronen Schnitt $b : U \to Q$. In x gilt dann $(\nabla_{b_\mu} b_\nu) = 0$ und $-div(b_\mu)(x) = (\delta b_\mu^*)(x) = 0$. Mit $\omega_\psi = \sum b_\mu^* \otimes (b_\mu \cdot \psi)$ folgt aus (1.2)

$$\begin{aligned}
\delta\omega_\psi &= \sum_\mu \delta b_\mu^*\, b_\mu \cdot \psi - \sum_\mu \epsilon_\mu \nabla_{b_\mu}(b_\mu \cdot \psi) \\
&= -\sum_\mu \epsilon_\mu ((\nabla^{LC}_{b_\mu} b_\mu) \cdot \psi + b_\mu \cdot \nabla_{b_\mu}\psi) \\
&= -D\psi
\end{aligned}$$

Insgesamt sind damit die Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}(\phi) + \delta^* \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)}\right)(\phi) &= \left\langle \frac{1}{2} D\psi - m_0\psi, \phi \right\rangle_S - \left\langle \frac{1}{2} D\psi, \phi \right\rangle_E \\
&= \langle D\psi - m_0\psi, \phi\rangle_E \\
&\overset{!}{=} 0 \qquad \forall \phi \in \Gamma(E).
\end{aligned}$$

äquivalent zu $D\psi = m_0\psi$.

3 Eichtheorie und die inhomogenen Lagrange-Gleichungen

Im Folgenden Abschnitt wollen wir aus Symmetrien einer Lagrangedichte bzw. Lagrange-Funktion Erhaltungsgrößen gewinnen. Dazu beschränken wir uns zunächst auf triviale Vektorbündel und den Satz von Noether.

3.1 Satz von Noether

In diesem Abschnitt betrachten wir triviale Vektorbündel der Form $E = M \times V$ mit kovarianter Ableitung $\nabla^E = d$. In diesem Fall ist $\Lambda^1(M, E) \simeq \Lambda^1(M, V)$ und damit

$$J^1(E) \simeq E \oplus \Lambda^1(M, V).$$

Definition 7. Es sei $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung einer Lie-Gruppe G. Dann heißt eine Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ (G, ρ)-invariant, falls für die dazugehörige Lagrange-Funktion $L : J^1(E) \to \mathbb{R}$ die Eigenschaft $L(x, \rho(g)\, v, \rho(g) \circ \omega_x) = L(x, v, \omega_x)$ für alle $g \in G$ und $(x, v, \omega_x) \in J^1(E)$ gilt.

Theorem 8. [Satz von Noether]
Ist $\mathcal{L}$ eine (G, ρ)-invariante Lagrange-Dichte auf E und erfüllt $\psi \in \Gamma(E)$ die Euler-Lagrange-Gleichung, dann ist für jedes $X \in \mathfrak{g}$ das Vektorfeld

$$(\rho_*(X)\psi) \lrcorner \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \psi} \in \mathfrak{X}(M)$$

divergenzfrei.

Beweis. Es sei $X \in \mathfrak{g}$ fixiert. Dann ist $\mathcal{L}(\rho(\exp tX)\, \psi) = \mathcal{L}(\psi)$ für alle t und wegen $\frac{d}{dt}(\rho(\exp tX)\, \psi) \mid_{t=0} = \rho_*(X)\, \psi$ folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}(\mathcal{L}(\rho(\exp tX)\, \psi) \mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} L(\psi + t\, \rho_*(X)\psi, \nabla^E \psi) \mid_{t=0} + \frac{d}{dt} L(\psi, \nabla^E \psi + t\, \nabla^E \rho_*(X)\psi) \mid_{t=0} \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}(\rho_*(X)\psi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \psi}(\nabla \rho_*(X)\psi) \\
&= \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}(\rho_*(X)\psi) + \delta^* \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \psi} \right) (\rho_*(X)\psi)}_{0} + div(\rho_*(X)\psi \lrcorner \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \psi}).
\end{aligned}$$

□

Um dies zu veranschaulichen, betrachten wir folgendes Beispiel:

Die $U(1)$-Invarianz des Klein-Gordon-Lagrangians. Wir betrachten das triviale Bündel $E = M \times \mathbb{C}$ über $M = \mathbb{R}^{1,3}$ mit der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ der Lagrange-Funktion

$$L(\psi, \nabla \psi) = \frac{1}{2} \langle \nabla \psi, \nabla \psi \rangle_{T^*M \otimes \mathbb{C}} - \frac{1}{2} m \langle \psi, \psi \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Dabei ist $\langle , \rangle_{\mathbb{C}}$ das kanonische reelle (und damit positiv-definite) Skalarprodukt auf $\mathbb{C}$. Zudem fassen wir ψ als $\mathbb{R}^2$-wertiges Feld $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ auf. Offensichtlich ist L invariant unter der kanonischen eindimensionalen $U(1)$-Wirkung. Die Lie-Algebra von $U(1)$ wird durch $i \in i\mathbb{R}$ erzeugt und es gilt:

Corollary 9. *Für jede Lösung ψ der Dirac-Gleichung ist das Vektorfeld*

$$\rho_*(i)\psi \lrcorner \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \psi} = \psi_1 grad\, \psi_2 - \psi_2 grad\, \psi_1$$

Divergenz-frei.

Beweis. Einerseits gilt

$$\frac{d}{dt}(e^{it} \cdot \psi) \mid_{t=0} = \rho_*(i)\psi = (-\psi_2, \psi_1).$$

gilt. Andererseits folgt in lokalen Koordinaten aus

$$\nabla \psi = \sum_{ij} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \psi_j)\, dx^i \otimes b_j$$

die Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \psi} &= \langle \nabla \psi, \, \rangle_{T^*M \otimes \mathbb{C}} \\
&= \sum_{ij} (\epsilon_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \psi_j)\, \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes b_j^* \\
&= \sum_j grad\, \psi_j \otimes b_j^*.
\end{aligned}$$

Damit ist aber

$$\rho_*(i)\psi \lrcorner \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \psi} = \psi_1 grad\, \psi_2 - \psi_2 grad\, \psi_1.$$

für jede Lösung der zu $\mathcal{L}$ gehörenden Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\Delta \psi_i = m \psi_i \qquad i \in \{1, 2\} \qquad (*)$$

nach dem vorangehenden Satz divergenzfrei. Zur Kontrolle:

$$\begin{aligned}
div(\psi_1 grad\, \psi_2) &= \langle grad\, \psi_1, grad\, \psi_2 \rangle_{\mathbb{R}^{1,3}} + \psi_1 \Delta \psi_2 \\
&\overset{(*)}{=} \langle grad\, \psi_1, grad\, \psi_2 \rangle_{\mathbb{R}^{1,3}} + m\, \psi_1 \psi_2. \\
&= div(\psi_2 grad\, \psi_1).
\end{aligned}$$

□

3.2 Eichinvarianz

Wir starten mit einer (G, ρ)-invarianten Lagrange-Funktion $\hat{L}$ auf $M \times V$. Sei zudem $\pi : P \to M$ ein G-Hauptfaserbündel über M. Dann definiert $\hat{L}$ nach Voraussetzung wie folgt eine Lagrange-Funktion auf $E = P \times_\rho V$. Indem man nämlich für ein fixiertes $x \in M$

ein Element $e \in E_x$ durch $e = [p, v]$ und $\omega \in \Lambda^1(M, E)_x$ als $\omega = [p, w]$ mit $w : T_x M \to V$ interpretiert, ist

$$\begin{array}{rcl} L : J^1(E) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ J^1(E)_x \ni (e, \omega) \in & \longmapsto & \hat{L}(x, v, w), \end{array}$$

unabhängig vom gewählten Repräsentanten. Dies führt zu der folgenden Definition.

Definition 10. Eine Lagrange-Funktion L auf einem Vektorbündel $E = P \times_\rho V$ über M heißt (G, ρ)-invariant, falls sie durch eine (G, ρ)-invarianten Lagrange-Funktion auf $M \times V$ induziert wird.

Im Gegensatz zu der kanonischen G-Wirkung auf dem trivialen Vektorbündel $M \times V$, lässt sich die G-Wirkung von G auf P im Allgemeinen nicht auf $P \times_\rho V$ übertragen, denn $g \cdot [p, v] := [pg^{-1}, v]$ ist bei einer nicht abelschen Strukturgruppe abhängig von der Wahl des Repräsentanten:

$$\begin{array}{rcl} g \cdot [ph, \rho(h^{-1})v] & = & [phg^{-1}, \rho(h^{-1})v] \\ & \neq & [pg^{-1}, \rho(h^{-1})]. \end{array}$$

Aus diesem Grund verwendet man für die Wirkung die Gruppe der Eichtransformationen $\mathcal{G}(P)$ auf P, das sind alle Automorphismen f von P mit $f(pg) = f(p)g$. Damit sei $f([p, v]) := [f(p), v]$ die durch $f \in \mathcal{G}(P)$ induzierte Wirkung auf E.

Weil man jeden Schnitt $\psi \in \Gamma(E)$ durch $\psi(x) = \big[p, \overline{\psi}(p)\big]$ durch eine ρ-äquivariante Abbildung $\overline{\psi} \in C^\infty(P, V)^\rho$ auf P mit Werten in V ausdrücken kann, wirkt ein Element $f \in \mathcal{G}(P)$ kanonisch durch

$$(f\psi)(x) := \big[f(p), \overline{\psi}(p)\big] = [p, \rho(\sigma_f(p)^{-1})\overline{\psi}(p)]$$

auf $\Gamma(E)$. Dabei ist

$$\sigma_f \in C^\infty(P, G)^G = \big\{s \in C^\infty(P, V) \mid s(pg) = g^{-1}s(p)g\big\}$$

die zu f gehörende G-äquivariante Abbildung auf P mit $f(p) = p \cdot \sigma(p)$.

Jedoch folgt aus der (G, ρ)-Invarianz von L noch keine Eichinvarianz der induzierten Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$. Sei nämlich ∇^A eine durch eine Zusammenhangsform A auf P induzierte kovariante Ableitung auf E. Für eine Eichtransformation f auf P und einen Schnitt $\psi \in \Gamma(E)$ gilt dann

$$\begin{array}{rcl} (\nabla^A f\psi)(x) & = & [p, D_A(\rho(\sigma_f)\overline{\psi})(p)] \\ & \overset{i.A.}{\neq} & [p, \rho(\sigma_f(p)^{-1})(D_A\overline{\psi})(p)] \\ & =: & (f\, \nabla^A\psi)(x) \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{rcl} L(f(\psi), \nabla^A f(\psi))(x) & \overset{i.A.}{\neq} & \hat{L}(x, \rho(\sigma_f(p)^{-1})\overline{\psi}(p), \rho(\sigma_f(p)^{-1})(D_A\overline{\psi})(p)) \\ & = & \hat{L}(x, \overline{\psi}(p), (D_A\overline{\psi})(p)) \\ & = & L(\psi, \nabla^A\psi)(x). \end{array}$$

Um dies dennoch zu erreichen, müssen wir die Eichtransformation zusätzlich auf die Zusammenhangsform A wirken lassen, denn damit gilt $\nabla^{f^*A} f\psi = f\nabla^A\psi$. Diese Eigenschaft macht es sinnvoll, die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ statt wie bisher als eine Funktion $\mathcal{L} : \Gamma(E) \times \mathcal{C}(P) \to C^\infty(M)$ zu betrachten, wobei wir mit $\mathcal{C}(P)$ den affinen Raum der Zusammenhangsformen auf P bezeichnen. Wir fassen zusammen:

Theorem 11. *Ist L eine (G,ρ)-invariante Lagrange-Funktion auf $E = P \times_\rho V$, dann ist die dazu erweiterte Lagrange-Dichte $\mathcal{L} : \Gamma(E) \times \mathcal{C}(P) \to C^\infty(M)$ eich-invariant, d.h.*

$$\mathcal{L}^{f^*A}(f\psi) = \mathcal{L}^A(\psi) \quad \forall f \in \mathcal{G}(P).$$

3.3 Die Eich-Algebra

Wie wir beim Satz von Noether gesehen haben, führen infinitesimale Variationen von Symmetrien zu Erhaltungsgrößen. Dieses Prinzip funktioniert auch in der Eichtheorie. Dazu gilt es jedoch zunächst einmal den Begriff einer infinitesimalen Eichtransformation zu klären, was in diesem Abschnitt geschehen soll.

Definition 12. Die Eich-Algebra $\mathfrak{g}_\mathcal{G}$ von $\mathcal{G}(P)$ sei die Menge der Funktionen $C^\infty(P,\mathfrak{g})^{Ad}$. Für $\overline{\sigma}, \overline{\omega}$ aus $\mathfrak{g}_\mathcal{G}$ setzen wir

$$[\overline{\sigma}, \overline{\omega}]_{\mathfrak{g}_\mathcal{G}}(p) := [\overline{\sigma}(p), \overline{\omega}(p)]_\mathfrak{g}.$$

Zudem bezeichnen wir den zu $\overline{\sigma}$ gehörende Schnitt aus $Ad(P) = P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ mit σ.

Lemma 13. $(\mathfrak{g}_\mathcal{G}, [,]_{\mathfrak{g}_\mathcal{G}})$ *ist eine Lie-Algebra. Darüber hinaus ist*

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g}_\mathcal{G} &\longrightarrow C^\infty(P,G)^G \\ \overline{\sigma} &\longmapsto \exp \circ \overline{\sigma} \end{aligned}$$

wohldefiniert und es gilt $\frac{d}{dt}\exp(t\,\overline{\sigma})\,|_{t=0} = \overline{\sigma}$.

Beweis. Es sei $p \in P$ fixiert. Dann folgt die erste Behauptung aus

$$\begin{aligned} [\overline{\sigma}, \overline{\omega}]_{\mathfrak{g}_\mathcal{G}}(pg) &= [\overline{\sigma}(pg), \overline{\omega}(pg)]_\mathfrak{g} \\ &= \left[Ad(g^{-1}) \circ \overline{\sigma}(p), Ad(g^{-1}) \circ \overline{\omega}(p)\right]_\mathfrak{g} \\ &= Ad(g^{-1}) \circ [\overline{\sigma}(p), \overline{\omega}(p)]_\mathfrak{g} \\ &= (Ad(g^{-1}) \circ [\overline{\sigma}, \overline{\omega}]_{\mathfrak{g}_\mathcal{G}})(p). \end{aligned}$$

Zudem ist

$$\begin{aligned} \exp(\overline{\sigma})(pg) &:= \exp \circ \overline{\sigma}(pg) \\ &= \exp(Ad(g^{-1}) \circ \overline{\sigma}(p)) \\ &= \alpha_{g^{-1}}(\exp \circ \overline{\sigma}(p)) \\ &= g^{-1}\exp(\overline{\sigma})(p)\,g. \end{aligned}$$

Die letzte Eigenschaft folgt aus $\frac{d}{dt}\exp(tX)\,|_{t=0} = X$ für alle $X \in \mathfrak{g}$. $\square$

Bekanntlich entspricht $C^\infty(P,G)^G$ auf natürliche Weise der Menge der Eichtransformation auf P. Um die Verbindung von $\mathfrak{g}_\mathcal{G}$ zu $\mathcal{G}(P)$ vollständig zu schließen, definieren wir

$$\begin{array}{rcl} Exp: \mathfrak{g}_{\mathcal{G}(P)} & \longrightarrow & \mathcal{G}(P) \\ Exp(\overline{\sigma})(p) & := & p \exp\left(\overline{\sigma}\right)(p). \end{array}$$

Schließlich zeigen wir noch das Verhalten von Zusammenhangsformen auf P und Schnitten auf E unter infinitesimalen Eichtransformationen.

Lemma 14. *Für ein $A \in \mathcal{C}(P)$, $\psi \in \Gamma(E)$ und $\overline{\sigma} \in \mathfrak{g}_\mathcal{G}$ ist*

$$\frac{d}{d}\left(Exp(t\,\overline{\sigma})^* A\right)|_{t=0} = D_A\overline{\sigma}$$

und

$$\frac{d}{dt}\left(Exp\left(t\overline{\sigma}\right)\psi\right)|_{t=0} = -\rho_*(\sigma)\,\psi.$$

Beweis. Für jedes t ist $Exp(t\overline{\sigma}) \in \mathcal{G}(P)$, d.h.

$$Exp(t\,\overline{\sigma})^*A = Ad(\exp(t\,\overline{\sigma})^{-1}) \circ A + \exp(t\,\overline{\sigma})^*\mu_G.$$

Die Ableitung nach t an der Stelle $t=0$ liefert

$$\underbrace{ad(-\overline{\sigma}) \circ A}_{=ad(A)\wedge\overline{\sigma}} + \frac{d}{dt}\left(\exp(t\overline{\sigma})^*\mu_G\right)|_{t=0}\,.$$

Es bleibt zu zeigen, dass der rechte Term gerade $d\overline{\sigma}$ entspricht. Dies folgt jedoch mit

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}\left(\exp(t\overline{\sigma})^*\mu_G\right)_p(X)\,|_{t=0} & = & \dfrac{d}{dt}(\mu_G)_{\exp(t\overline{\sigma})}\left(d(\exp(t\overline{\sigma}))_p(X)\right)|_{t=0} \\ & = & \dfrac{d}{dt}(\mu_G)_{\exp(t\overline{\sigma})}(0)\,|_{t=0} + \dfrac{d}{dt}\left(d(\exp(t\overline{\sigma}))_p(X)\right)|_{t=0} \\ & = & \dfrac{d}{dt}\left(d\exp_{t\overline{\sigma}(p)}(td\overline{\sigma}_p(X))\right)|_{t=0} \\ & = & \dfrac{d}{dt}(d\exp_{t\overline{\sigma}(p)}(0)\,|_{t=0} + \dfrac{d}{dt}d\exp_0(t\,d\overline{\sigma}_p(X)) \\ & = & d\overline{\sigma}_p(X). \end{array}$$

Andererseits gilt für $\psi \in \Gamma(E)$ mit $\psi(p) = [p, \overline{\psi}(p)]$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}(Exp\left(t\sigma\right)\psi)(x)\,|_{t=0} & = & [p, \dfrac{d}{dt}\rho(\exp(-t\overline{\sigma}(p))\overline{\psi}(p)\,|_{t=0}] \\ & \overset{Lem.13}{=} & [p, -\rho_*(\overline{\sigma}(p))\,\overline{\psi}(p)] \\ & =: & -\rho_*(\sigma(x))\psi(x). \end{array}$$

Die Ableitung nach t an $t=0$ liefert wieder die Behauptung. $\square$

3.4 Der Strom als Erhaltungsgröße

Es sei $\overline{\sigma} \in \mathfrak{g}_\mathcal{G}$ fixiert und $\mathcal{L}$ eine eichinvariante Lagrange-Dichte. Dann gilt nach dem vorangegangenem Lemma

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\mathcal{L}^{Exp(t\overline{\sigma})^*A}(Exp(t\overline{\sigma})\psi) \mid_{t=0} && (3.1)\\ &= \frac{d}{dt}\mathcal{L}^A(\psi - t\rho_*(\sigma)\psi) \mid_{t=0} + \frac{d}{dt}\mathcal{L}^{A+t\,D_A\overline{\sigma}}(\psi) \mid_{t=0} && (3.2)\end{aligned}$$

Die linke Seite ist uns schon bekannt. Die linke gilt es zunächst zu untersuchen.

Definition 15. Für ein $\psi \in \Gamma(E)$ und ein $A \in \mathcal{C}(P)$ heißt

$$\frac{\partial}{\partial A}\mathcal{L}^A(\psi)(\omega) := \frac{d}{dt}\mathcal{L}^{A+t\overline{\omega}}(\psi) \mid_{t=0}$$

Variationsableitung von $\mathcal{L}^A(\psi)$ in Richtung $\omega \in \Omega^1(M, Ad(P))$.

Lemma 16. $\frac{\partial}{\partial A}\mathcal{L}^A(\psi)$ *ist ein Schnitt in* $TM \otimes Ad(P)^*$.

Beweis. Dazu fixieren wir ein $\psi \in \Gamma(E)$ sowie ein $A \in \mathcal{C}(P)$. Dann ist für $\omega_x : T_xM \to Ad(P)_x$ die Abbildung

$$\omega_x \mapsto \frac{d}{dt}L(\psi(x), (\nabla^A\psi)(x) + t\,\rho_*(\omega_x)\psi(x)) \mid_{t=0}$$

linear in ω_x. Die Behauptung folgt damit aus der Eigenschaft

$$\nabla^{A+t\overline{\omega}}\psi = \nabla^A\psi + t\rho_*(\omega)\psi,$$

wobei $\overline{\omega}$ ein Element von $\Omega^1_{hor}(P, \mathfrak{g})^{Ad}$ ist. □

Im Folgenden wollen wir annehmen, dass die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G halbeinfach ist und damit deren Killingform eine Bündelmetrik $\langle,\rangle_{Ad}$ auf $Ad(P)$ definiert. Insbesondere gibt es dann einen durch die Metrik g von M und $\langle,\rangle_{Ad}$ gegebenen Isomorphismus zwischen $\Gamma(TM \otimes Ad(P)^*)$ und $\Gamma(T^*M \otimes Ad(P)) = \Omega^1(M, Ad(P))$.

Definition 17. Die zu $\frac{\partial}{\partial A}\mathcal{L}^A(\psi)$ gehörende 1-Form $J^A(\psi) \in \Omega^1(M, Ad(P))$ heißt *Strom von* $\psi \in \Gamma(E)$ zum Zusammenhang ∇^A.

Analog zum Satz von Noether werden wir nun sehen, dass wir aus jedem stationären Schnitt $\psi \in \Gamma(E)$ auf $E = P \times_\rho V$ eine Erhaltungsgröße gewinnen:

Theorem 18. [Strom-Erhaltung]
Sei $A \in \mathcal{C}(P)$ fixiert und $\psi \in \Gamma(E)$ stationär bezüglich A und einer eichinvarianten Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$. Dann ist der Strom $J^A(\psi)$ von ψ divergenzfrei, d.h. $\delta^A(J^A(\psi)) = 0$.

Beweis. Wir steigen direkt in der Gleichung 3.2 und integrieren diese über eine präkompakte Umgebung U. Da ψ stationär sein soll, verschwindet die linke Seite und es bleibt lediglich folgendes stehen

$$\begin{aligned}\int_U \frac{d}{dt}\mathcal{L}^{,A+t\,D_A\overline{\sigma}}(\psi)\,|_{t=0}\,dM_g &= \int_U \frac{\partial}{\partial A}\mathcal{L}^A(\psi)(d_A\sigma)\,dM_g \\ &= \int_U \left\langle J^A(\psi), d_A\sigma\right\rangle_{T^*M\otimes Ad(P)}\,dM_g \\ &= \int_U \left\langle \delta^A(J^A(\psi)),\sigma\right\rangle_{Ad(P)}\,dM_g \\ &\overset{!}{=} 0\end{aligned}$$

Weil σ und U beliebig wählbar sind, folgt daraus die Behauptung. □

3.5 Die inhomogenen Lagrange-Gleichungen

Bisher wurde stets eine Zusammenhangsform A auf P fixiert. In diesem Abschnitt wollen wir jedoch nicht nur ψ variieren sondern gleichzeitig auch A. Um dies tun zu können, benötigt man ein *eichinvariantes* Wirkungsfunktional für A und benutzen dazu das Yang-Mills-Funktional:

$$\mathcal{L}_{YM}(A) := -\frac{1}{2}\left\langle F^A, F^A\right\rangle \quad \text{bzw. } \mathcal{S}_U^{YM}(A) := \int_U \mathcal{L}_{YM}(A)\,dM_g.$$

Definition 19. Ein Paar (A,ψ) heißt *stationär* bezüglich $\mathcal{S}_U + \mathcal{S}_U^{YM}$, falls

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{S}_U(\psi+t\phi) + \mathcal{S}_U^{YM}(A+t\overline{\omega})\right)|_{t=0}= 0$$

für alle $\phi \in \Gamma(E)$ und $\omega \in \Omega^1(M, Ad(P))$ erfüllt ist.

Theorem 20. *Ein Paar (A,ψ) ist genau dann stationär bezüglich $\mathcal{S}_U+\mathcal{S}_U^{YM}$ für alle präkompakten Umgebungen $U \subset M$, falls es die* inhomogenen Euler-Lagrange-Gleichungen

1. $\frac{\partial\mathcal{L}^A}{\partial\psi} + \left(\delta^{\nabla^A}\right)^*\left(\frac{\partial\mathcal{L}^A}{\partial(\nabla^A\psi)}\right) = 0$ *und*
2. $\delta^A F^A = J^A(\psi)$

erfüllt.

Beweis. Hierbei nutzen wir die Eigenschaft

$$\frac{d}{dt}(-\frac{1}{2}\left\langle F^{A+t\overline{\omega}}, F^{A+t\overline{\omega}}\right\rangle |_{t=0}= -\left\langle F^A, d_A\omega\right\rangle,$$

welche aus

$$F^{A+t\overline{\omega}} = F^A + td_A\omega + \frac{1}{2}t^2\,[\omega,\omega]$$

folgt. Daraus ergibt sich nämlich

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\mathcal{S}_U^{A+t\varpi}(\psi+t\phi)+\mathcal{S}_U^{YM}(A+t\varpi)\right)|_{t=0} &= \int_U \frac{d}{dt}\mathcal{L}^{A+t\varpi}(\psi+t\phi)\,|_{t=0}\,dM_g \\
&\quad -\int_U \left\langle F^A, d_A\omega\right\rangle dM_g \\
&= \int_U \frac{\partial\mathcal{L}^A}{\partial\psi}(\phi)+\left(\delta^{\nabla^A}\right)^*\left(\frac{\partial\mathcal{L}^A}{\partial(\nabla^A\psi)}\right)(\phi)dM_g \\
&\quad +\int_U \left\langle\delta^A(J^A(\psi)),\omega\right\rangle_{Ad(P)} dM_g \\
&\quad -\int_U \left\langle\delta^A F^A,\omega\right\rangle dM_g
\end{aligned}
$$

Und weil man ϕ und ω beliebig wählen kann, erhält man damit die Behauptung. $\square$

Literatur

[Baum(2009)] H. Baum. Eichfeldtheorie. 2009.

[Bleecker(1981)] D. Bleecker. *Gauge theory and variational principles.* Addison-Wesley Reading, 1981.