Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck, Dr. D. Agostini, Dipl. I. Schwarz,
J. Hauber, M. Majchrzak

Analysis I*
WiSe 2018/19

Übungsblatt 1

Schriftliche Abgabe: Dienstag 23. Oktober 2018
Schreiben Sie auf jede Lösung bitte ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + ev. Zeit)

Aufgabe 1.1 (2+3 Punkte) Wir betrachten die folgenden Aussagen:

$\mathcal{A}$: *Wenn das Wetter schön ist, fährt Luise an den See und geht baden.*
$\mathcal{B}$: *Das Wetter ist schön.* $\mathcal{C}$: *Luise fährt an den See.* $\mathcal{D}$: *Luise geht baden.*

a) Drücken Sie $\mathcal{A}$ durch $\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$ und geeignete logische Verknüpfugen aus. Stellen Sie eine Wahrheitswertetabelle für $\mathcal{A}$ in Abhängigkeit von den verschiedenen Wahrheitswerten für $\mathcal{B},\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ auf.

b) Drücken Sie die Negation $\neg\mathcal{A}$ durch $\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$ und logische Verknüpfungen aus, wobei das Zeichen $\neg$ nur noch unmittelbar vor $\mathcal{B},\mathcal{C}$ oder $\mathcal{D}$ auftreten soll, nicht jedoch vor zusammengesetzten Aussagen. Formulieren Sie die Negation von $\mathcal{A}$ auch in gutem Deutsch.

Aufgabe 1.2 (1+2+2 Punkte)
Die folgende Wahrheitswertetabelle definiert eine neue logische Verknüpfung $*$

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}*\mathcal{B}$
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

a) Welche einfache logische Operation liefert $\mathcal{C}*\mathcal{C}$?

b) Zeigen Sie mit einer Wahrheitswertetabelle, dass $*$ eine logische Verknüpfung "Nicht-Oder" ("nor"=not or) ist: $\mathcal{A}*\mathcal{B} \Longleftrightarrow \neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$.

c) Folgern Sie, dass sich alle in der Vorlesung eingeführten Verknüpfungen ausschließlich durch $*$ darstellen lassen. Geben Sie konkret die Darstellung von $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ an. Bitte formulieren Sie ihre Beweise in klarem Deutsch, damit man zwischen dem Beweis und dem Gegenstand des Beweises unterscheiden kann.

Aufgabe 1.3 (3+3 Punkte)
Seien M, N und X Mengen.

a) Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

i) $(M\cap N)\setminus X = (M\setminus X)\cap(N\setminus X)$ ii) $(M\cup N)\times X = (M\times X)\cup(N\times X)$
iii) $(M\setminus N)\times X = (M\times X)\setminus(N\times X)$

b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen gelten und beweisen Sie ihre Resultate (falls die Aussage falsch ist, reicht auch die Angabe eines Gegenbeispiels).

i) $(M\setminus X)\cup X = M$ ii) $(M\cup X)\setminus X = M$
iii) Wenn $M\cap N\cap X$ leer ist, so ist mindestens eine der Mengen $M\cap N$, $M\cap X$, $N\cap X$ leer.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ beliebige Aussagen. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) $\neg(\neg\mathcal{A})$ ist äquivalent zu $\mathcal{A}$,

b) $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ ist äquivalent zu $(\neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B})$,

c) $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ ist äquivalent zu $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$.

d) $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist äquivalent zu $\neg(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$ (indirekter Beweis)

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen immer wahr sind

a) $\big(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})\big) \Rightarrow \mathcal{B}$ (logische Reduktion)

b) $\big[(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})\big] \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$ (Regel vom Kettenschluss)

Aufgabe

a) Formalisieren Sie folgende Aussagen mit Hilfe von Quantoren, verneinen Sie die Aussagen und übersetzen Sie die verneinten Aussagen in gutes Deutsch.

   a) "Auf jedem Übungsblatt gibt es eine Aufgabe, die alle Studenten lösen können."

   b) "In jedem Jahr gibt es einen Monat, sodass an allen Tagen dieses Monats mindestens eine Stunde lang die Sonne scheint".

b) Wann ist es erlaubt in quatisierten Aussagen die Reihenfolge zu ändern? Betrachten Sie dazu folgende Beispiele: Seien $A, B \subset \mathbb{N}$ und

$$\mathcal{S} := \big(\forall\, a \in A\, \exists\, b \in B \,:\, a < b\big), \qquad \mathcal{T} := \big(\exists\, b \in B\, \forall a \in A : a < b\big).$$

Gilt $\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{T}$? Gilt $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{S}$? Beweis oder Gegenbeispiel!

Aufgabe

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen. Formulieren Sie mit Hilfe der Verknüpfungen $\neg, \wedge$ und $\vee$ eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn **entweder** $\mathcal{A}$ **oder** $\mathcal{B}$ wahr ist.