HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck, Dr. D. Agostini, Dipl. I. Schwarz,
J. Hauber, M. Majchrzak

Analysis I*
WiSe 2018/19

Übungsblatt 10

Schriftliche Abgabe: Dienstag 8. Januar 2019, bis 13:15 vor der Vorlesung!
Schreiben Sie bitte jede Lösung auf ein extra Blatt!
Schreiben Sie auf jede Lösung ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Übungsleiter + ev. Zeit)

Aufgabe 10.1 (2+3+1 Punkte) Sei V ein reeller Vektorraum. Zeigen Sie:

a) Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V und $||x|| := \sqrt{\langle x,x\rangle}, x \in V$, die dadurch definierte Norm, so gilt das Parallelogrammgesetz

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad \forall x, y \in V. \tag{$*$}$$

b) Ist anderseits $||\cdot||$ eine Norm auf V, die das Parallelogrammgesetz $(*)$ erfüllt, so existiert ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ mit $||x|| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ für alle $x \in V$. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass man das gesuchte Skalarprodukt aus der Norm wie folgt erhält:

$$\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big)$$

- Zeigen Sie dazu $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$ für alle $x,y,z \in V$.
- Zeigen Sie dann $\langle nx,y\rangle = n\langle x,y\rangle$ für alle $x,y \in V, n \in \mathbb{N}$. Folgern Sie daraus, dass $\langle qx,y\rangle = q\langle x,y\rangle$ für alle $x,y \in V, q \in \mathbb{Q}$, und daraus dann $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$ für alle $x,y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.

c) Erfüllt jede Norm das Parallelogrammgesetz? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

Aufgabe 10.2 (1+1+1+2 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(1+3i)}{3n+7}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$, c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{2n+5}{4n+3}\Big)^n$, d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Aufgabe 10.3 (1+1+2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie die Reihenwerte:

a) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{5^{n+1}}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{3^{2n}}$, c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{4^n}$.

Aufgabe 10.4 (4 Punkte) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für die folgende Reihen konvergieren:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^k$, b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{(k-1)k}$.

Schriftliche Zusatzaufgabe 5.Z (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Menge der Polynome auf $[-1,1]$ ein Untervektorraum von $B\big([-1,1]\big)$, dem Raum der beschränkten Funktionen auf $[-1,1]$, ist. Zeigen Sie, dass $(p_n := x^{2n})$ eine Cauchy-Folge bzgl. d_∞ ist, die im Raum der Polynome nicht konvergiert. [Siehe 9.3]

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 10.A Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ für $z \in \mathbb{C}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k^k)^2}{k^{(k^2)}}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\frac{\pi}{3})\frac{2n+1}{n^2-1}$

Aufgabe 10.B

Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie Ihren Wert:

a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5(1+i)^n}{2^{n+1}}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{3})}{2^n}$

Aufgabe 10.C

Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert und berechnen Sie ihren Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}.$$