Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck, Dr. D. Agostini, Dipl. I. Schwarz,
J. Hauber, M. Majchrzak

Analysis I*
WiSe 2018/19

Übungsblatt 12

Schriftliche Abgabe: Dienstag 22. Januar 2019, bis 13:15 vor der Vorlesung!
Schreiben Sie bitte jede Lösung auf ein extra Blatt!
Schreiben Sie auf jede Lösung ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Übungsleiter + ev. Zeit)

Aufgabe 12.1 (1+1+1+2 Punkte)

Stellen Sie folgende Funktionen als Potenzreihen um $x_0 = 0$ dar.

$$\text{a) } f(x) = e^{x^2+3}, \quad \text{b) } g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \text{c) } h(x) = \frac{6x^4}{2x+3}, \quad \text{d) } k(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}.$$

Aufgabe 12.2 (3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, so dass es eine Konstante c gibt mit $|n - f(n)| \leq c$. Beweisen Sie, dass für eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch die umgeordnete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ gegen den selben Grenzwert konvergiert.

Aufgabe 12.3 (1+2+2+2 Punkte)

Überprüfen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{b) } \lim_{z\to 1} \frac{z^n - 1}{z^m - 1},\ z \in \mathbb{C}\ n, m \in \mathbb{N},$$

$$\text{c) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad \text{d) } \lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 4x + 5}\right).$$

Aufgabe 12.4 (4 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 4} & \text{für } x \neq \pm 2 \\ a & \text{für } x = -2 \\ b & \text{für } x = +2 \end{cases}$$

Können a bzw. b so gewählt werden, dass f in $x = -2$ bzw. $x = 2$ stetig ist?

Schriftliche Zusatzaufgabe 12.Z (1+1+3 Punkte)
Die *Cantorfunktion* $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ wird iterativ definiert, indem man mit $F(0) := 0$ und $F(1) := 1$ beginnt. Immer wenn F in den Punkten a, b schon definiert ist, aber noch nicht auf dem Intervall (a, b), definiert man F auf dem mittleren Drittel des Intervalls als den Mittelwert von F(a) und F(b), d.h.

$$F(x) := \frac{F(a) + F(b)}{2} \text{ für } a + \frac{b-a}{3} < x < a + \frac{2(b-a)}{3}.$$

Auf der Cantormenge $\mathcal{C}$ (vgl. W.4) definiert man $F(x) := sup\{F(y) \mid y<x, y\in [0, 1] \setminus \mathcal{C}\}$.

a) Begründen Sie, weshalb F auf $[0, 1]$ wohldefiniert ist.

b) Skizzieren Sie F.

c) Zeigen Sie, dass F stetig ist.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 12.A

Stellen Sie folgende Funktionen als Potenzreihen um $x_0 = 0$ dar.

a) $f(x) = e^{3x^4+2} - e^{x^2}$, b) $g(x) = \frac{x^2+2x}{(x-1)(2x-3)}$.

Aufgabe 12.B

Überprüfen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und berechnen Sie sie ggf.

a) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin(\frac{1}{x})$

b) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{Re(z)}{|z|^r})$ für $z \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

d) $\lim\limits_{z\to 1} \left(\frac{1}{z+3} - \frac{2}{3z+5}\right)\frac{1}{z-1}$

e) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{4^z - 2^z}{2z}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{|x-1|}{|x-2|-1}$ für $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 12.C

Betrachten Sie die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ aus der Vorlesung

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

Zeigen Sie, dass der Grenzwert von f in $(0,0)$ entlang jeder Geraden durch $(0,0)$ existiert.

Aufgabe 12.D

Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\min\{f,g\}(x) := \min\{f(x), g(x)\} \text{ und } \max\{f,g\}(x) := \max\{f(x), g(x)\}$$

stetig sind.