HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck, Dr. D. Agostini, Dipl. I. Schwarz,
J. Hauber, M. Majchrzak

Analysis I*
WiSe 2018/19

Übungsblatt 13

Schriftliche Abgabe: Dienstag 29. Januar 2019, bis 13:15 vor der Vorlesung!
Schreiben Sie bitte jede Lösung auf ein extra Blatt!
Schreiben Sie auf jede Lösung ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Übungsleiter + ev. Zeit)

Aufgabe 13.1 (2+2+2 Punkte) Es sei $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall.

a) Sei $f : I \to I$ stetig. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt in I hat, d.h. es existiert $x^* \in I$ mit $f(x^*) = x^*$. Hinweis: Betrachten Sie die Hilfsfunktion $h : I \to \mathbb{R}, h(x) = f(x) - x$.

b) Sei nun $g : I \to \mathbb{R}$ stetig und $I \subset g(I)$. Zeigen Sie, dass auch g einen Fixpunkt hat. Hinweis: Suchen Sie Punkte $\xi_a, \xi_b \in I$ mit $g(\xi_a) = a$ und $g(\xi_b) = b$ und betrachten Sie eine Hilfsfunktion zwischen diesen beiden Punkten.

c) Ein Zug benötigt für 500 km genau 10 Stunden, fährt also durchschnittlich 50 km/h. Auf der Strecke fährt er unterschiedlich schnell und hält auch öfters. Gibt es während der 10 Stunden einen Zeitraum von einer Stunde, in dem der Zug genau 50 km zurücklegt? Hinweis: Betrachten Sie den in der letzten Stunde zurückgelegten Weg $\Delta(t) = x(t) - x(t-1), 1 \leq t \leq 10$.

Aufgabe 13.2 (2+4 Punkte) Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f, g : D \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) Sind f und g Lipschitz-stetig, so ist auch $f + g$ Lipschitz-stetig.

b) Sind f und g beschränkt und gleichmäßig stetig bzw. Lipschitz-stetig, so ist auch $f \cdot g$ gleichmäßig stetig bzw. Lipschitz-stetig.

Aufgabe 13.3 (1+2+2 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \supset (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie:

a) f ist in $x_0 \in (a, b)$ stetig genau dann, wenn $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

b) Jede Unstetigkeitsstelle von f ist eine Sprungstelle und f hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen (Hinweis: Zeigen Sie, dass f auf einem endlichen Intervall $[\alpha, \beta]$ höchstens endlich viele Sprungstellen x_0 mit Sprung $\sigma(f, x_0) \geq \frac{1}{n}$ hat.)

c) Ist f streng monoton wachsend, so ist $f^{-1} : f\big((a, b)\big) \to (a, b)$ stetig.

Aufgabe 13.4 (2+1+2 Punkte) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen und $\alpha > 0$. f heißt *Hölder-stetig zum Exponenten* α, falls ein $C > 0$ existiert, sodass für alle $x, y \in X$ gilt: $d_Y\big(f(x), f(y)\big) \leq C \cdot \big(d_X(x, y)\big)^\alpha$. Zeigen Sie:

a) Ist f Hölder-stetig, so ist f gleichmäßig stetig und für $\alpha = 1$ sogar Lipschitz-stetig.

b) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ist Hölder-stetig. (Hinweis: 4.1)

c) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ Hölder-stetig mit $\alpha > 1$ und $C > 0$, so ist f konstant. Zeigen Sie dazu für alle $x > y \in I$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$|f(x) - f(y)| \leq n \cdot C\Big(\frac{x-y}{n}\Big)^\alpha.$$

Schriftliche Zusatzaufgabe 13.Z (3 Punkte)
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ eine Abzählung. Für $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Reihe: $A(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ mit $a_n(x) = 2^{-n}$ falls $f(n) \leq x$ und $a_n(x) = 0$ sonst. Zeigen Sie: $A(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent. $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto A(x)$ ist streng monoton wachsend, hat in $q \in \mathbb{Q}$ eine Sprungstelle mit Sprung $2^{-f^{-1}(q)}$ und ist an allen irrationalen Stellen stetig.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 13.A

Ist $D \subset \mathbb{C}$ und sind $f, g : D \to \mathbb{C}$ zwei gleichmäßig stetige Funktionen, so ist auch $f + g$ gleichmäßig stetig.

Aufgabe 13.B

Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Stetigkeit und bestimmen Sie ggf. die Art der Unstetigkeitsstellen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{2}{x+2} & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Aufgabe 13.C

Sei $P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2-1} + ... + a_1x + a_0,\ a_k \in \mathbb{R}, a_{2n+1} \neq 0$ ein reelles Polynom von ungeradem Grad. Zeigen Sie, dass P mindestens eine eine Nullstelle besitzt. Nutzen Sie dazu $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (P(x)$ und das $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 13.D

Sei $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen mit $|f_n(x)| \leq 1$ für alle $x \in [0, 1]$. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $\sup f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, (\sup f_n)(x) := \sup\{f_n(x) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ist stetig.

b) $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, (\liminf\limits_{n\to\infty} f_n)(x) := \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ist stetig.

Aufgabe 13.E

Untersuchen Sie bei der folgenden Funktion R für jedes x, ob R in x stetig ist und wenn nicht welche Art von Unstetigkeit vorliegt:

$$R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, R(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit } ggT(p, q) = 1 \end{cases}.$$