Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck, Dr. D. Agostini, Dipl. I. Schwarz,
J. Hauber, M. Majchrzak

Analysis I*
WiSe 2018/19

Übungsblatt 2

Schriftliche Abgabe: Dienstag 30. Oktober 2018, bis 13:15 vor der Vorlesung!
Schreiben Sie bitte jede Lösung auf ein extra Blatt!
Schreiben Sie auf jede Lösung ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + ev. Zeit)

Aufgabe 2.1 (2+1+1+1 Punkte)
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A, A_1, A_2 \subset X$ sowie $B, B_1, B_2 \subset Y$ Teilmengen. Es ist

$$f(A) := \{y \in Y \mid \exists x \in A : f(x) = y\} \qquad \text{die Bildmenge von } A \text{ (unter } f)$$
$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \qquad \text{die Urbildmenge von } B \text{ (unter f).}$$

Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,

b) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

Geben Sie ein Beispiel an, bei dem $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ ist. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ für alle Teilmengen $A_1, A_2 \subset X$ gilt.

Aufgabe 2.2 (2+1+1+1 Punkte)
Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen und $h = g \circ f$ die Verknüpfung. Zeigen Sie:

a) Ist h bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.

b) Sind f und g injektiv, so ist h injektiv.

c) Sind f und g surjektiv, so ist h surjektiv.

d) Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel für f und g an, sodass h bijektiv, aber f nicht surjektiv und g nicht injektiv ist.

Aufgabe 2.3 (2+2+2 Punkte)

Zeigen/Lösen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion

a) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1} = \frac{2n}{n+1}$ für jedes natürliche $n \geq 2$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$ für jedes natürliche $n \geq 1$.

c) In der Ebene seien n verschiedene Geraden gegeben. In wieviele Teilstücke können diese Geraden die Ebene maximal zerteilen?

Schriftliche Zusatzaufgabe 2.Z (3 Punkte)
Sei α eine reelle Zahl sodass $\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$ gilt. Beweisen Sie, dass auch $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe

Sei $\mathbb{N}^0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv bzw. bijektiv: $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (m,n) \mapsto m+n$; $g : \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}^0, (m,n) \mapsto m+n$; $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n^2$; $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^0, n \mapsto n$; $j : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$?

Aufgabe

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$ Teilmengen. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Aufgabe

Sei $f : X \to Y$ eine injektive Abbildung. Zeigen Sie, dass dann für jedes $y \in Y$ gilt, dass $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$ entweder die leere Menge oder eine Menge mit einem Element ist.

Aufgabe

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$