Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck, Dr. D. Agostini, Dipl. I. Schwarz
J. Hauber, M. Majchrzak

Analysis I*
WiSe 2018/19

Übungsblatt 3

Schriftliche Abgabe: Dienstag 6. November 2018, 13:15 vor der Vorlesung
Schreiben Sie auf jede Lösung bitte ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + ev. Zeit)

Aufgabe 3.1 (3 Punkte)
Zeigen Sie induktiv, dass jede endliche Teilmenge $E = \{e_1, ..., e_n\} \subseteq \mathbb{R}$ ein Minimum besitzt.

Aufgabe 3.2 (5 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $0 \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

b) $(-1) \cdot x = -x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) $xy > 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$ und $y < 0$.

d) $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

e) $1 > 0$.

Verwenden Sie dafür die Axiome für angeordnete Körper oder Aussagen, die Sie daraus beweisen. Geben Sie jeweils das verwendete Axiom an.

Aufgabe 3.3 (1+1+1+1+2+2 Punkte) Seien $x \in \mathbb{R}$ und $k, n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie die folgenden Formeln für den Binomialkoeffizienten:

a) $\binom{n}{k} = 0$ genau dann, wenn $n < k$,

b) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, d) $\binom{x}{k} + \binom{x}{k-1} = \binom{x+1}{k}$.

e) (Binomischer Satz) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in \mathbb{R}$, gilt: $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

f) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{34623863432} \sum_{h=0}^{k} \binom{34623863432}{k} \binom{k}{h} (-1)^{34623863432-k} x^h$.
Beweisen Sie dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zusatsaufgabe 3.5 (3 Punkte) Der Ausdruck $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq x\}$ für $x \in \mathbb{R}$ definiert die größte ganze Zahl kleiner gleich x. Zeigen Sie: Ist x irrational, so gilt:

$$\left\{ \lfloor nx \rfloor + n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor + n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbb{N}$$

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe Beweisen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

a) Aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $a + c \leq b + d$

b) Aus $0 \leq a \leq b$ und $0 \leq c \leq d$ folgt $ac \leq bd$

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ und $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, dabei ist $b \neq 0$ und $d \neq 0$

Aufgabe

Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen a, b die folgenden Ungleichung bzw. Gleichungen gelten. Wann gilt in a) bzw. c) die Gleichheit?

a) $|a + b| + |a - b| \geq |a| + |b|$.

b) $2\big(|a|^2 + |b|^2\big) = |a + b|^2 + |a - b|^2$

c) (Mittelungleichungen) Für positive a, b gilt: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Aufgabe

Zeigen Sie: Eine n-elementige Menge hat insgesamt 2^n verschiedene Teilmengen.

Aufgabe

Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n \geq n^2$?