Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck, Dr. D. Agostini, Dipl. I. Schwarz,
J. Hauber, M. Majchrzak

Analysis I*
WiSe 2018/19

Übungsblatt 5

Schriftliche Abgabe: Dienstag 20. November 2018, bis 13:15 vor der Vorlesung!
Schreiben Sie bitte jede Lösung auf ein extra Blatt!
Schreiben Sie auf jede Lösung ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Übungsleiter + ev. Zeit)

Aufgabe 5.1 (5 Punkte)

Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der algebraischen Form $x + iy$ dar:

a) $(1+3i)(-2+i)+(3-2i)$ b) $\frac{2-3i}{1+2i}$ c) $(1-\sqrt{3}i)^7$

Bestimmen Sie für folgende komplexe Zahlen die trigonometrische Darstellung:

d) $\sqrt{3}-3i$ e) $\dfrac{1+i}{1-i}$

Aufgabe 5.2 (3 Punkte)

Geben Sie für die Lösungen der Gleichung $z^2 = a + i \cdot b$ eine allgemeine Formel in Abhängigkeit von a und b an.

Aufgabe 5.3 (1+1+2+2Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Im}(z)\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z+i|\}$

c) $C = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z-2+i| \leq 2\}$

d) $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\frac{1}{z}) \geq 1\}$

Aufgabe 5.4(1+2+2)

Wir betrachten die obere Halbebene H^+ und die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ in $\mathbb{C}$:

$$H^+ := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}, \qquad \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}.$$

a) Zeigen Sie, dass für $z \in H^+$ gilt $\frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{D}$.

b) Zeigen Sie, dass $f : H^+ \to \mathbb{D}, f(z) = \frac{z-i}{z+i}$, bijektiv ist und geben Sie die Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{D} \to H^+$ an.

c) Bestimmen Sie das Bild der folgenden Teilmengen von H^+ unter f:

$$\ell := \{iy \,|\, y \in \mathbb{R}^+\}, \qquad k := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

und skizzieren Sie ℓ, $f(\ell)$, k und $f(k)$.

Schriftliche Zusatzaufgabe 5.Z (3 Punkte)
Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, die $A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 \geq |z|, \mathrm{Re}(z) \geq 0, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ auf $f(A) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 2 \geq |z-2+3i|\}$ abbildet.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 5.A
Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen die trigonometrische Darstellung.

a) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$

b) $\dfrac{-1+i}{1-\sqrt{3}i}$

Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $x + iy$ dar.

c) $\frac{3-i}{2+3i}$

d) $(\sqrt{3} - i)^{15}$

e) $5\big(\cos(\frac{7\pi}{6}) + i\sin(\frac{7\pi}{6})\big) + \sqrt{2}\big(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\big)$

Hinweis: Erinnern Sie sich (Schulwissen) an die Werte von $\sin(0), \sin(\frac{\pi}{6}), \sin(\frac{\pi}{4}), \sin(\frac{\pi}{3})$ und $\sin(\frac{\pi}{2})$ bzw. für die entsprechenden Werte für cos.

Aufgabe 5.B

Finden Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = 3 - 4i$.

Aufgabe 5.C

Skizzieren Sie:

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| \leq 3\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \leq 1\}$

c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = |z - 1 - i|\}$

d) $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) \leq 0\}$

e) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}$ und $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1, \mathrm{Re}(z) \geq 0, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Skizzieren Sie E und $f(E)$.