Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck, Dr. D. Agostini, Dipl. I. Schwarz,
J. Hauber, M. Majchrzak

Analysis I*
WiSe 2018/19

Übungsblatt 6

Schriftliche Abgabe: Dienstag 27. November 2018
Schreiben Sie auf jede Lösung bitte ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + ev. Zeit)

Aufgabe 6.1 (3+2 Punkte) Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei für $x,y \in X$

$$d^*(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \qquad \widetilde{d}(x,y) := \min\{1, d(x,y)\}.$$

a) Zeigen Sie, dass (X,d^*) und $(X,\widetilde{d})$ metrische Räume sind.

b) Untersuchen Sie, wie die ε-Kugeln von (X,d^*) und $(X,\widetilde{d})$ im Fall $X=\mathbb{C}$ und $d(x,y)=|x-y|$ aussehen.

Aufgabe 6.2 (4 Punkte) Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Zeigen Sie:

a) $Int(A)$ ist die größte offene Menge, die in A enhalten ist, d.h. es gilt

$$Int(A) = \bigcup_{\substack{U\subset A \\ U \text{ offen}}} U$$

b) $cl(A)$ ist die kleinste absgeschlossene Menge, die A enthält, d.h. es gilt

$$cl(A) = \bigcap_{\substack{F\supset A \\ F \text{ abgeschlossen}}} F$$

Aufgabe 6.3 (5 Punkte)

a) Bestimmen Sie in $\mathbb{R}$ den Abschluss, den Rand und das Innere der Menge

$$A = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{m} \,\middle|\, n,m \in \mathbb{N} \right\}$$

b) Bestimmen Sie in $\mathbb{R}$ die Häufungspunkte der Mengen

$$B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\tfrac{1}{\sqrt{k+1}}, \tfrac{1}{\sqrt{k}}\right], \qquad C = \mathbb{Q}.$$

Aufgabe 6.4 (4 Punkte) Untersuchen Sie, ob die folgenden Folgen reeller Zahlen konvergieren und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert (mit Beweis !)

$$a_n = \frac{n}{n^2-6}, \qquad b_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \qquad c_n = \frac{2^n}{n!}.$$

Schriftliche Zusatzaufgabe 6.Z (3 Punkte)
Wieviele verschiedene Mengen können aus einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ maximal entstehen, wenn Sie nacheinander den Abschluss oder das Innere bilden?

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 6.A Sei (X, d) ein metrischer Raum und $p \in X$. Wir definieren eine Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad d_p(x,y) = \begin{cases} d(x,p) + d(y,p), & \text{wenn } x \neq y, \\ 0 & \text{wenn } x = y \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass d_p eine Metrik auf X ist, und skizzieren Sie die ε-Kugeln von d_p, wenn $X = \mathbb{C}, d(x,y) = |x-y|$ und $p = 0$.

Aufgabe 6.B Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt eine *Norm*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(N1) $\|v\| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, und $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$.

(N2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$.

(N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.

a) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ist:
$$d \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad (v,w) \mapsto \|v - w\|.$$

b) Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir
$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \qquad \|x\|_\infty := \max\big\{|x_1|, \ldots, |x_n|\big\}.$$
Zeigen Sie dass $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind.

c) Seien d_1, d_2 und d_∞ die Metriken auf $\mathbb{R}^2$, die den Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ entsprechen. Skizzieren sie die Kugeln
$$K_1^1(0) = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, d_1(0,v) < 1\}, \qquad K_1^2(0) = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, d_2(0,v) < 1\},$$
$$K_1^\infty(0) = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, d_\infty(0,v) < 1\}.$$

Aufgabe 6.C Betrachten Sie $\mathbb{R}$ mit der Euklidische Metrik $d(x,y) = |x - y|$. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge. Zeigen Sie dass
$$\sup A \in cl(A), \qquad \inf A \in cl(A).$$

Aufgabe 6.D Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, seien
$$K_\varepsilon(x) := \{y \in X \,|\, d(x,y) < \varepsilon\}, \qquad C_\varepsilon(x) := \{y \in X \,|\, d(x,y) \leq \varepsilon\}.$$

a) Beweisen Sie, dass $C_\varepsilon(x)$ abgeschlossen ist und dass $C_\varepsilon(x) \supset cl(K_\varepsilon(x))$.

b) Gilt $C_\varepsilon(x) = cl(K_\varepsilon(x))$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 6.E
Bestimmen Sie in $\mathbb{R}$ den Abschluss, den Rand, das Innere und die Häufungspunkte der Mengen
$$A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B = \left\{ \frac{n^3 + 7n}{n^2 - 6} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$