Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck, Dr. D. Agostini, Dipl. I. Schwarz,
J. Hauber, M. Majchrzak

Analysis I*
WiSe 2018/19

Übungsblatt 7

Schriftliche Abgabe: Dienstag 4. Dezember 2018
Schreiben Sie auf jede Lösung bitte ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + ev. Zeit)

Aufgabe 7.1 (3+2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Folge $a_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

b) Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x_n}{n})^n = 1$.

Aufgabe 7.2 (2+1+1 Punkte)

a) Seien (z_n) und (w_n) Folgen in $\mathbb{C}$, sodass (z_n) beschränkt ist und $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n w_n = 0$.

b) Seien (z_n) und (w_n) Folgen in $\mathbb{C}$, sodass $z_n \cdot w_n$ konvergiert. Kann daraus die Konvergenz von (z_n) bzw. (w_n) gefolgert werden?

c) Seien $f(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ und $g(x) = x^e + b_{e-1}x^{e-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ Polynome mit $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ und $0 \le d < e$. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$.

Aufgabe 7.3 (6 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Folgen reeller Zahlen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:

$$a_n = \frac{(1+7n+n^3)^4}{3-14n^{12}}, \qquad b_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \frac{1}{n^2}, \qquad c_n = n \cdot \cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right),$$
$$d_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \qquad e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}, \qquad f_n = \sqrt[n]{3^{n+1} + 3^{\sqrt{n^2+1}}}.$$

Aufgabe 7.4 (2+2 Punkte)

a) Für $q \in \mathbb{R}$ sei $x_n = q^n$ und $y_m := \frac{1}{m}\big(x_1 + \ldots + x_m\big)$. Geben Sie alle $q \in \mathbb{R}$ an, für die (x_n) konvergiert und alle $q \in \mathbb{R}$ für die (y_m) konvergiert. (Wie lauten die Ergebnisse für $q \in \mathbb{C}$?)

b) Sei nun (x_n) eine beliebige Folge in $\mathbb{C}$ mit $x_n \longrightarrow x^*$ und (y_m) wie in a) definiert. Zeigen Sie $y_m \longrightarrow x^*$. Hinweis: Benutzen Sie die Beschränktheit von (x_n) und

$$y_m - x^* = \frac{1}{m}\Big((x_1 - x^*) + \ldots + (x_{n_0-1} - x^*)\Big) + \frac{1}{m}\Big((x_{n_0} - x^*) + \ldots + (x_m - x^*)\Big)$$

für geeignete $n_0 < m$.

Schriftliche Zusatzaufgabe 7.Z (3 Punkte) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen sodass $a_n \ge 1$ und $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} = 0$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 7.A

a) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie: Aus $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1}$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

b) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$, und seien $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zwei monoton wachsende Funktionen mit $\mathbb{N} = f(\mathbb{N}) \cup g(\mathbb{N})$. Zeigen Sie: Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_{f(n)} = a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{g(n)}$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Aufgabe 7.B

a) Entscheiden Sie, ob die folgenden rekursiv definierten Folgen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n + 1}, \qquad y_{n+1} = \frac{1}{y_n}$$

Dabei sei in beiden Fällen $x_1 = y_1 = c > 1$ eine feste reelle Zahl.

b) Seien x_1 und d positive reelle Zahlen und (x_n) die folgende rekursiv definierte Folge:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{d}{x_n}\right)$$

Zeigen Sie, dass (x_n) gegen $\sqrt{d}$ konvergiert.

Aufgabe 7.C

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen reeller bzw. komplexer Zahlen:

$$a_n = \frac{(2+3i)n^3 + 7n + 9}{n\big((1-2i)n - 1\big)\big((2+5i)n - 3\big)}, \quad b_n = n\cos\tfrac{1}{n}, \quad c_n = \binom{2n}{n}, \quad d_n = 4^n + 10^n - 11^n.$$

Aufgabe 7.D

a) Es seien positive reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gegeben. Wir definieren das arithmetische Mittel $A_n := \frac{1}{n}(a_1 + ... + a_n)$ und das geometrische Mittel $G_n := \sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n}$. Beweisen Sie, dass stets $A_n \geq G_n$ gilt.

b) Seien $x, y \in \mathbb{R}^+$ und $(a_n), (g_n)$ die folgenden rekursiv definierten Folgen:

$$\begin{cases} a_0 := \frac{x+y}{2}, \\ a_{n+1} := \frac{a_n + g_n}{2} \end{cases}, \qquad \begin{cases} g_0 := \sqrt{xy}, \\ g_{n+1} := \sqrt{a_n g_n} \end{cases}$$

Zeigen Sie: (a_n) und (g_n) konvergieren gegen den gleichen Grenzwert M (M heißt das arithmetisch-geometrische Mittel von x und y).