Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck, Dr. D. Agostini, Dipl. I. Schwarz,
J. Hauber, M. Majchrzak

Analysis I*
WiSe 2018/19

Übungsblatt 8

Schriftliche Abgabe: Dienstag 11. Dezember 2018
Schreiben Sie auf jede Lösung bitte ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + ev. Zeit)

Allgemeiner Hinweis: Sie können Teilaufgaben, die Sie nicht bewiesen haben, in späteren Teilaufgaben verwenden.

Aufgabe 8.1 (2+1+3 Punkte) Betrachten Sie $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik $d(x,y) = ||x-y||$.

a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen. Für $x \in X$ definieren wir
$$d_A(x) := \inf_{y\in A} d(x,y).$$
Zeigen Sie, dass $d_A(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in A$.

b) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ auch beschränkt und abgeschlossen. Zeigen Sie, dass $\{d_A(x) \,|\, x \in B\}$ beschränkt ist und daher $d(A,B) := \sup\limits_{x\in B} d_A(x)$ definiert ist.

c) Betrachten Sie die Menge $X = \{A \subseteq \mathbb{R}^n \,|\, A \text{ beschränkt und abgeschlossen}\}$ und für $A, B \in X$ sei $d_H(A,B) := \max\{d(A,B), d(B,A)\}$. Zeigen Sie dass d_H eine Metrik auf X ist (d_H heißt Hausdorff-Metrik).

Aufgabe 8.2 (1+2+2+1 Punkte)
Mit Aufgabe 7.1. definieren wir $\exp(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ für alle $x \geq 0$. (Die Gleichheit gilt sogar für alle $x \in \mathbb{R}$).

c) $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. (Daraus folgt: $\exp(q) = e^q$, $\forall\, q \in \mathbb{Q}$.) [Hinweis: 7.1b)]

d) Die Abbildung $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist streng monoton wachsend.

Aufgabe 8.3 (2+2 Punkte)

a) Sei (X,d) ein metrischer Raum und (x_n) eine Folge in X. Zeigen Sie, dass die Menge $HP(x_n)$ der Häufungspunkte von (x_n) abgeschlossen ist.

b) Sei (x_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik. Zeigen Sie, dass $HP(x_n)$ ein Maximum hat und dass $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \max HP(x_n)$. [Hinweis: 6.C]

Aufgabe 8.4 (4 Punkte) Betrachten Sie die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to (-1,+1)$, $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

a) Zeigen Sie, dass ϕ bijektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass $d_\phi(x,y) := |\phi(x) - \phi(y)|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert. (d_ϕ ist die von ϕ induzierte Metrik.)

c) Entscheiden Sie, ob $(\mathbb{R}, d_\phi)$ vollständig ist.

Schriftliche Zusatzaufgabe 8.Z (3 Punkte) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex wenn für alle $x, y \in A$ und $t \in [0,1]$ gilt: $(1-t)x + ty \in X$. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, abgeschlossen und konvex und sei d_A wie in Aufgabe 8.1. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in X$ genau ein $y \in A$ existiert, sodass $d(x, y) = d_A(x)$.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 8.A
Wir betrachten auf der Menge der natürlichen Zahlen die Funktion $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$d(n, m) := \frac{|n - m|}{nm}, \qquad n, m \in \mathbb{N} \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, d)$ ein metrischer Raum ist.

b) Entscheiden Sie, ob $(\mathbb{N}, d)$ vollständig ist (mit Beweis).

c) Bestimmen Sie alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen von $(\mathbb{N}, d)$.

Aufgabe 8.B (Verallgemeinerte Intervallschachtelung)
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine nichtleere und beschränkte Teilmenge. Wir definieren

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} \qquad \text{(der Durchmesser von } A\text{)}.$$

Sei (F_n) eine Folge nichtleerer, beschränkter und abgeschlossener Teilmengen von X mit

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots, \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$$

Zeigen Sie, dass genau ein $x \in X$ existiert mit $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Aufgabe 8.C Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen. Wir definieren:

$$\overline{x} := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k \qquad \text{und} \qquad \underline{x} := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k.$$

- Warum existieren die Grenzwerte? (Ist (x_n) nach oben/unten unbeschränkt, so sei $\lim\limits_{n\to\infty} \pm\infty = \pm\infty$).

- Zeigen Sie, dass $\overline{x}$ und $\underline{x}$ Häufungspunkte von (x_n) in $\overline{\mathbb{R}}$ sind. Zeigen Sie

$$\overline{x} = \limsup_{n\to\infty} x_n \qquad \text{und} \qquad \underline{x} = \liminf_{n\to\infty} x_n.$$