HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck, Dr. D. Agostini, Dipl. I. Schwarz,
J. Hauber, M. Majchrzak

Analysis I*
WiSe 2018/19

Übungsblatt 9

Schriftliche Abgabe: Dienstag 18. Dezember 2018
Schreiben Sie auf jede Lösung bitte ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Übungsleiter + ev. Zeit)

Aufgabe 9.1 (2+2+2 Punkte) Sei $a \in \mathbb{R}^+$ beliebig. Zeigen Sie:

a) Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt $f(x) := \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \geq \sqrt{a}$. Folgern Sie, dass für jeden Startwert $x_0 \neq 0$ die Iterationsfolge (x_n) mit $x_{n+1} = f(x)$ konvergiert.

b) Für $g(x) = \frac{1}{3}(2x + \frac{a}{x^2})$ konvergiert die Iterationsfolge (x_n) mit $x_{n+1} = g(x)$ für jeden Startwert $x_0 \in \left[\sqrt[3]{a}, \infty\right)$ gegen $\sqrt[3]{a}$.

c) Bestimmen Sie $\sqrt[3]{2}$ auf zwei Nachkommastellen genau (mit Begründung).

Aufgabe 9.2 (4 Punkte) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

a) Die Vereinigung endlich vieler kompakter Teilmengen von X ist kompakt.

b) Der Durchschnitt beliebig vieler kompakter Teilmengen von X ist kompakt.

c) Kann die Voraussetzung *endlich viele* in a) durch *abzählbar unendlich* oder *beliebig viele* ersetzt werden?

Aufgabe 9.3 (1+3+2 Punkte)
Sei X eine nichtleere Menge. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, sodass $|f(x)| \geq C$ für alle $x \in X$. Es bezeichne $B(X)$ die Menge aller beschränkten, reellwertigen Funktionen auf X:

$$B(X) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ beschränkt} \right\}.$$

Es bezeichne $d_\infty : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}$ die Funktion $d_\infty(f, g) := \sup \left\{ |f(x) - g(x)| \,\middle|\, x \in X \right\}$.

a) Zeigen Sie, dass das Supremum in $\mathbb{R}$ existiert, d.h. dass d_∞ korrekt definiert ist.

b) Zeigen Sie, dass d_∞ eine Metrik auf $B(X)$ definiert.

c) Zeigen Sie, dass der metrische Raum $(B(X), d_\infty)$ vollständig ist.

Aufgabe 9.4 (4 Punkte)
Sei (x_n) eine Folge positiver reeller Zahlen mit dem Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und sei $q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge der Potenzen $\left(x_n^q\right)$ konvergiert mit dem Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^q = x^q$. [Hinweis: Aufg. 4.1]

Schriftliche Zusatzaufgabe 9.Z (3 Punkte)
Betrachten Sie die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to (-1, +1)$, $\;x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Zeigen Sie, dass eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ bzgl. der Standardmetrik genau dann im verallgemeinerten Sinn konvergiert, wenn $\big(\phi(x_n)\big)$ in $[-1, +1]$ bzgl. der Standardmetrik konvergiert.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 9.A
Seien K_n nicht leere kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, sodass $K_{n+1} \subset K_n$. Zeigen Sie:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \quad \text{ist nicht leer.}$$

Aufgabe 9.B
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine vollständige Teilmenge. Zeigen Sie, dass A abgeschlossen ist. Folgern Sie, dass jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 9.C
Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} = x$. Zeigen Sie, dass dann auch $(\sqrt{x_n})$ konvergiert mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$.

Aufgabe 9.D
Betrachten Sie $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d\Big((x_1, x_2)\,,\,(y_1, y_2)\Big) = \left|\frac{1}{2}(y_1 - x_1) + 2(y_2 - x_2)\right| + \left|\frac{1}{2}(y_1 - x_1) - 2(y_2 - x_2)\right|.$$

a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

b) Betrachten Sie die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \Phi(x_1, x_2) = (1 + 2x_2, 3 + \frac{1}{8}x_1)$. Zeigen Sie, dass Φ bezüglich d eine Kontraktion ist, nicht jedch bzgl. d_1, d_2, d_∞ (siehe 6.B).

c) Zeigen Sie, dass Φ genau einen Fixpunkt besitzt und bestimmen Sie diesen.