Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck, Dr. D. Agostini, Dipl. I. Schwarz,
J. Hauber, M. Majchrzak, L. Upmeier zu Belzen

Analysis I*
WiSe 2018/19

Probeklausur - Musterlösung

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Definieren Sie was es heißt, dass eine Folge (a_n) aus X gegen $a \in X$ konvergiert.

b) Betrachten Sie in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ die Folge (x_n) mit $x_1 := 1$ und $x_{n+1} := \sqrt{x_n + 6}$.

   i) Zeigen Sie induktiv, dass die Folge (x_n) monoton ist und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $0 \leq x_n \leq 3$.

   ii) Zeigen Sie, dass die Folge (x_n) konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.

Lösung

a) Eine Folge (a_n) in einem metrischen Raum (X, d) konvergiert gegen $a \in X$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $d(a_n, a) < \varepsilon$.
Alternativlösung: (a_n) konvergiert gegen $a \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon{>}0\; \exists\, n_0{\in}\mathbb{N}\; \forall\, n{\geq}n_0 \,:\, d(a_n, a) < \varepsilon$.

b) i) Z.z.: Für die Folge $(x_n) \in \mathbb{R}$ mit $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$ gilt: $0 \leq x_n \leq 3$.
Beweis: (induktiv) Induktionsanfang: $0 \leq x_1 = 1 \leq 3$ ist wahr.
Induktionsvoraussetzung: Es gelte $0 \leq x_n \leq 3$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $0 \leq x_{n+1} \leq 3$.
Beweis:

$$\left.\begin{array}{ll} x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} \geq \sqrt{0 + 6} = \sqrt{6} > 0, & \text{da } x_n \geq 0 \text{ laut IVor.} \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} \leq \sqrt{3 + 6} = 3, & \text{da } x_n \leq 3 \text{ laut IVor.} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq x_{n+1} \leq 3.$$

Z.z.: Die Folge (x_n) ist monoton wachsend.
Beweis: (induktiv) Induktionsanfang: $x_2 = \sqrt{x_1 + 6} = \sqrt{7} \geq \sqrt{1} = 1 = x_1$.
Induktionsvoraussetzung: Es gelte $x_{n+1} \geq x_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $x_{n+2} \geq x_{n+1}$.
Beweis: $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} + 6} \geq \sqrt{x_n + 6} = x_{n+1}$, laut IVor und wegen der Monotonie der Wurzelfunktion.

ii) Da nach i) die Folge (x_n) monoton wachsend und durch 3 nach oben beschränkt ist, ist sie konvergent. Der Grenzwert heiße x. Zur Bestimmung von x beachte, dass wegen den Rechenregeln für Grenzwerte gilt:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} \;\Leftrightarrow\; \left(x_{n+1}\right)^2 = x_n + 6 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(x_{n+1}\right)^2 &= \lim_{n\to\infty} (x_n + 6) \\ \Leftrightarrow\; x^2 &= x + 6. \end{aligned}$$

Also folgt: $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$. Da $x_n \geq 0$ für alle n gilt, folgt $x \geq 0$ wegen Monotonie der Grenzwerte und somit $x = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Seien $(z_n), (w_n) \subset \mathbb{C}$ zwei Folgen, sodass $(z_n \cdot w_n)$ eine Nullfolge ist. Dann ist (z_n) oder (w_n) eine Nullfolge.

b) Seien $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ zwei Folgen, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Dann hat $(x_n \cdot y_n)$ eine in $[0, +\infty)$ konvergente Teilfolge.

Lösung

a) Gilt nicht. Betrachte folgendes Beispiel

$$z_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}, \qquad w_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Hier gilt $z_n \cdot w_n = 0$ für alle n, also ist $(z_n \cdot w_n)$ eine Nullfolge, aber (z_n) und (w_n) sind beide keine Nullfolgen, da sie jeweils 1 als Häufungspunkt haben.

b) Gilt ebenfalls nicht. Betrachte hier folgendes Beispiel: $x_n = -\frac{1}{n}$ und $y_n = n^2$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} -n = -\infty$.

Aufgabe 3 (3+3+1 Punkte)

a) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Definieren Sie das Innere von A, $int(A)$, den Abschluss von A, $cl(A)$, und den Rand von A, ∂A.

b) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert:

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$d\Big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\Big) = \begin{cases} |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2| & \text{falls } (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2) \\ 0 & \text{falls } (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \end{cases}$$

Dabei dürfen Sie sich bei der Dreiecksungleichung auf den Fall beschränken, dass alle 3 Punkte verschieden sind.

c) Skizzieren Sie die Kugel vom Radius 1 um den Punkt $(0, 0)$.

Lösung

a) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt:

- $int(A) := \{x \in A \,|\, \exists\, \varepsilon > 0 \, : \, K_\varepsilon(x) \subset A\}$
- $cl(A) := \{x \in A \,|\, \forall \varepsilon > 0 \, : \, K_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset\}$
- $\partial(A) := cl(A) \setminus int(A)$.

b) Z.z.: Die Abbildung $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$d\Big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\Big) = \begin{cases} |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2| & \text{falls } (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2) \\ 0 & \text{falls } (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \end{cases}$$

ist eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$. Beweis:
Positivität: Da Beträge nicht negativ sind, gilt offensichtlich $d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) \geq 0$ für alle $\binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2} \in \mathbb{R}^2$.

Gilt $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, so ist nach dem 2. Fall $d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = 0$. Gilt andererseits $d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = 0$, so würde im ersten Fall $x_2{=}y_2{=}0$ und $x_1{-}y_1 = 0 \Leftrightarrow x_1{=}y_1$ folgen, also $(x_1, x_2) = (x_1, 0) = (y_1, 0) = (y_1, y_2)$. Da auch im 2. Fall $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ folgt, gilt also $d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.
Symmetrie:

$$d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \begin{cases} |x_1-y_1|+|x_2|+|y_2| \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} |y_1-x_1|+|y_2|+|x_2| \\ 0 \end{cases} = d\big((y_1,y_2),(x_1,x_2)\big)$$

da $|a| = |-a|$ und wegen der Kommutativität der Addition.
Dreiecksungleichung: Wenn $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)$ drei paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^2$ sind, so gilt:

$$\begin{aligned} d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) &= |x_1-y_1| + |x_2| + |y_2| \\ &\overset{(*)}{\leq} |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2| + 2|z_2| + |y_2| \\ &= d\big((x_1,x_2),(z_1,z_2)\big) + d\big((z_1,z_2),(y_1,y_2)\big), \end{aligned}$$

dabei gilt die Ungleichung $(*)$, wegen der Dreiecksungleichung für Beträge und da Beträge nicht negativ sind.

c) Die Kugel bzgl. dieser Metrik d vom Radius 1 um den Punkt $(0, 0)$ erfüllt:

$$\begin{aligned} K_1\big((0,0)\big) &= \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, d\big((x_1,x_2),(0,0)\big) < 1\big\} \\ &= \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, (x_1,x_2) = (0,0) \text{ oder } 1 > |x_1-0|+|x_2|+|0| = |x_1|+|x_2|\big\} \\ &= \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |x_1| + |x_2| < 1\big\} \end{aligned}$$

Diese Menge ist das Quadrat (ohne Rand) mit den Ecken $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$.

Aufgabe 4 (1+2+2 Punkte)

a) Geben Sie eine Definition dafür was es heißt, dass eine Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d) kompakt ist.

b) Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik.

c) Zeigen Sie mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß, dass das Intervall $[0, 1]$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ kompakt ist.

Lösung

a) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. A ist kompakt, falls jede Folge (a_n) aus A eine in A konvergente Teilfolge besitzt.
Alternative: A ist kompakt, falls aus jeder offenen Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werde kann.
2. Alternative: A ist kompakt, falls A vollständig und total beschränkt ist.

b) Satz (Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte Folge in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

c) Z.z.: $[0, 1]$ ist in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ kompakt.
Beweis: Wir zeigen, dass $[0, 1]$ folgenkompakt ist. Sei $(a_n) \subset [0, 1]$ eine beliebige Folge. Dann gilt also $0 \leq a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist (a_n) beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) die in $\mathbb{R}$ konvergiert. Da $[0, 1]$ abgeschlossen ist und $(a_{n_k}) \subset [0, 1]$, liegt der Grenzwert auch in $[0, 1]$, d.h. (a_{n_k}) ist in $[0, 1]$ konvergent. Also ist $[0, 1]$ folgenkompakt und damit kompakt.