Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck, Dr. D. Agostini, Dipl. I. Schwarz,
J. Hauber, M. Majchrzak, L. Upmeier zu Belzen

Analysis I*
WiSe 2018/19

Weihnachtsblatt

Alle Aufgaben dieses Blattes sind Zusatzaufgaben und erhöhen nicht die zu erreichende Gesamtpunktzahl.
Schriftliche Abgabe: Dienstag 8. Januar 2019, bis 13:15 vor der Vorlesung!
Schreiben Sie bitte jede Lösung auf ein extra Blatt!
Schreiben Sie auf jede Lösung ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Übungsleiter + ev. Zeit)

Aufgabe W.1 (7+5 Punkte)

a) Sophie bekommt auch dieses Weihnachten wieder sehr viele Geschenke, nämlich abzählbar unendlich viele. Die Pakete, die alle würfelförmig sind, stellt sie mit dem Größten, das einen Meter hoch ist, beginnend nach Größe geordnet in einer Reihe unter dem Tannenbaum auf. Sie stellt dabei fest, dass die Pakete jeweils ein Drittel so breit sind wie das vorherige. Wie weit müssen die Äste des Tannenbaums mindestens ragen, wenn alle Pakete unterm Baum Platz finden? Beim Auspacken stellt Sophie fest, dass sie beim nachfolgenden Paket immer nur jeweils die Hälfte der Zeit braucht. Wie lange hat Sophie für das erste Paket gebraucht, wenn sie, gierig wie sie ist, schon nach 2 Minuten alles ausgepackt hat? Anschließend sammelt Sophie alles Geschenkpapier, um es im nächsten Jahr wieder zu verwenden. Wieviel Verpackungsmaterial hat sie, wenn jedes Geschenk an allen Seiten eingepackt war?

b) Paul bekommt zu Weihnachten von seinem Patenonkel, der unter Pauls Streichen viel leiden musste, einen Würfel von einem Kubikmeter Größe geschenkt. Paul braucht zum Auspacken eine Minute, und im Allgemeinen hängt die Zeit, die er zum Auspacken braucht, proportional von der Oberfläche des Päckchens ab. Als er das Paket geöffnet hat, ist in dem Karton wieder ein eingepackter Würfel und $\frac{7}{8}m^3$ Luft. Und so geht es weiter. Nach dem n-ten Auspacken findet Paul wieder ein würfelförmiges Päckchen und $\frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}m^3$ gähnende Leere. Er versucht, die leeren Kartons aufeinander zu stapeln. Gelingt ihm das? Zudem machen die Eltern sich Sorgen, ob Paul denn rechtzeitig zum Abendspaziergang zum Onkel mit dem Auspacken fertig sein wird. Packt er noch an Neujahr? Und warum ist er nachher so enttäuscht, dass er nicht mehr mit zum Onkel will?

Aufgabe W.2 (5+2 Punkte)

a) Sei $\mathbb{Q}[X]$ die Menge aller Polynome mit rationalen Koeffizienten und sei $\mathbb{O}$ das Nullpolynom. Wir definieren die Menge $\mathbb{A}$ der algebraischen Zahlen als

$$\mathbb{A} := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{\mathbb{O}\} : p(x) = 0\}.$$

D.h. x ist eine algebraische Zahl, wenn es Nullstelle eines Polynoms ist, dessen Koeffizienten rational und nicht alle 0 sind.
Zeigen Sie: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$. Ist $\mathbb{A}$ abzählbar? (mit Beweis! Hinweis: Aufg. 4.4, außerdem dürfen Sie benutzen, dass ein Polynom p vom Grad n höchstens n Nullstellen besitzt.) Ist $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ vollständig?

b) Ist die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\{1, 2\}$ abzählbar? (Hinweis: Aufg. 4.Z)

Aufgabe W.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie: Die Gleichung $|z+w|^2+|z-w|^2 = 2\big(|z|^2+|w|^2\big)$ wird von allen komplexen Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ erfüllt. Interpretieren Sie dieses Ergebnis an einer geeigneten Skizze geometrisch.

Aufgabe W.4 (2+2+2 Punkte)

Wir definieren die *Cantormenge* $\mathcal{C}$ rekursiv indem wir mit der Menge $A_1 := [0,1]$ beginnen. Wir teilen dieses Intervall nun in drei gleichgroße Teilintervalle und entfernen das mittlerere (offene) Intervall. Wir erhalten dann $A_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. In jedem weiteren Schritt teilen wir jedes Intervall in A_n in drei gleichgroße Teilintervalle und entfernen das mittlere. Dann definieren wir die Cantormenge als

$$\mathcal{C} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ kompakt ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ nirgends dicht ist, d.h. dass $int(\mathcal{C}) = \emptyset$.

c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ keine isolierten Punkte besitzt, d.h. dass jeder Punkt von $\mathcal{C}$ auch ein Häufungspunkt von $\mathcal{C}$ ist.

Das Team der Analysis I* wünscht Ihnen

Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch ins neue Jahr!