Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck

Kurven und Flächen
WiSe 2017/18

Übungsblatt 14

Schriftliche Abgabe: Mittwoch 7. Februar 2018, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 14.1
Bestimmen Sie die Dupin'sche Indikatrix bei (0,0,0)=A(0,0) für das folgende parametrisierte Flächenstück

$$A(u^1, u^2) = \big(u^1, u^2, (u^1)^3 - 3(u^2)^2u^1\big).$$

Zeichnen Sie diese Fläche mit GeoGebra (als $z = x^3 - 3y^2x$). (Diese Fläche heißt übrigens der Affensattel, warum wohl? :-))

Aufgabe 14.2
Betrachten Sie die Abbildung $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, S(p) = c \cdot p$ für ein $c > 0$. Sei $F : G \to \mathbb{R}^3$ ein regulär parametrisiertes Flächenstück und $\tilde{F} = S \circ F$.

a) Zeige Sie, dass $\tilde{F}$ auch ein regulär parametrisiertes Flächenstück ist.

b) Geben Sie Formeln an, mit denen sich die folgenden Größen von $\tilde{F}$ aus den entsprechenden Größen von F gewinnen lassen:

- die erste und zweite Fundamentalform
- die Gauß-Krümmung und die mittlere Krümmung

c) Welche der Eigenschaften a)-e) von Abbildungen zwischen Flächen hat S?

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen

Aufgabe 14.3
Es seien g und $\tilde{g}$ die darstellenden Matrizen von 2 Skalarprodukten auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass wenn Orthogonalität bzgl. g genau dann gilt, wenn Orthogonalität bzgl $\tilde{g}$ gilt, d.h. falls

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^2 : X^t g Y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X^t \tilde{g} Y = 0$$

dann gibt es ein $c > 0$, sodass $\tilde{g} = c \cdot g$ gilt. Insbesondere impliziert die Erhaltung der Orthogonalität bereits die Erhaltung sämtlicher Winkel!

Aufgabe 14.4
Sei T die Tangentialebene an die Kugel im Südpol. Bestimmen Sie die Parametrisierungen der Kugel, die man erhält, wenn man die Kugel:

- senkrecht auf T projiziert (orthographische/senkrechte Projektion)
- per Zentralprojektion vom Mittelpunkt auf T projiziert (gnomische Projektion)
- per Zentralprojektion vom Nordpol auf T projiziert (stereographische Projektion)