Lösungen der Aufgaben zu Abschnitt 3.1

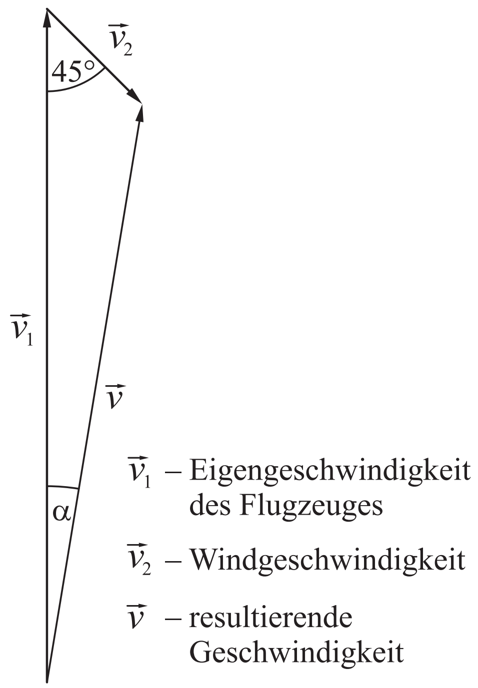
1. Für die Beträge v_1, v_2 und v der Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ (Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges), $\vec{v}_2$ (Windgeschwindigkeit) und $\vec{v}$ (resultierende Geschwindigkeit) gilt nach dem Kosinussatz:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1\, v_2\, \cos(\angle \vec{v}_1, \vec{v}_2) \\ &= 150^2 + 30^2 - 2\cdot 150\cdot 30\cdot \cos 45^\circ \\ &\approx 17\,000, \end{aligned}$$

also $v \approx 130\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Der Kurswinkel α lässt sich daraus z. B. nach dem Sinussatz bestimmen:

$$\frac{\sin\alpha}{v_2} = \frac{\sin 45^\circ}{v}\,.$$

Es ergibt sich $\alpha \approx 9{,}4^\circ$.



2. $|\vec{F}_H| = |\vec{F}_G| \cdot \sin 30^\circ \approx 29\,500\,\mathrm{N}$, $\;|\vec{F}_N| = |\vec{F}_G| \cdot \cos 30^\circ \approx 51\,095\,\mathrm{N}$

3. $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\;\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\;\overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{c}$

4. Falls $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$ ist, so ergibt sich auf beiden Seiten der Gleichung $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{u} = \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{u})$ die Nullpfeilklasse.

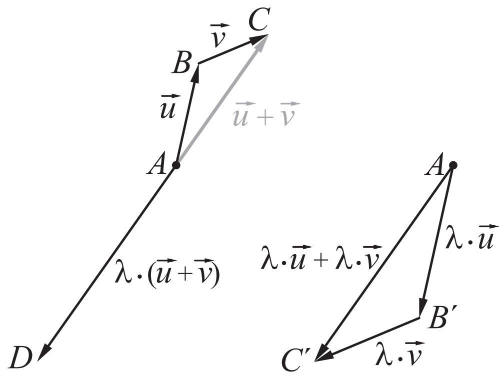
Falls $\lambda > 0$ und $\mu < 0$ und $\overrightarrow{AB}$ ein Repräsentant von $\vec{u}$ ist, so gilt nach Definition 3.5 für einen Repräsentanten $\overrightarrow{AC}$ von $\mu\cdot\vec{u}$, dass $|AC| = |\mu|\cdot|AB|$ ist und C auf dem zu AB entgegengesetzten Strahl liegt. Für einen Repräsentanten $\overrightarrow{AD}$ von $\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{u})$ muss $|AD| = \lambda\cdot|AC| = \lambda\cdot(|\mu|\cdot|AB|)$ sein und D auf dem Strahl AC, also auf dem zu AB entgegengesetzten Strahl liegen. Ist $\overrightarrow{AE}$ ein Repräsentant von $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{u}$, so ist $|AE| = |\lambda\mu|\cdot|AB|$ und (wegen $\lambda\cdot\mu < 0$) E ein Punkt des zu AB entgegengesetzten Strahls. Somit sind D und E identisch, es gilt also $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$ und somit die Behauptung.

Falls $\lambda < 0$ und $\mu < 0$ und $\overrightarrow{AB}$ ein Repräsentant von $\vec{u}$ ist, so gilt nach Definition 3.5 für einen Repräsentanten $\overrightarrow{AC}$ von $\mu\cdot\vec{u}$, dass $|AC| = |\mu|\cdot|AB|$ ist und C auf dem zu AB entgegengesetzten Strahl liegt. Für einen Repräsentanten $\overrightarrow{AD}$ von $\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{u})$ muss $|AD| = |\lambda|\cdot|AC| = |\lambda|\cdot(|\mu|\cdot|AB|)$ sein und D auf dem zu AC entgegengesetzten Strahl und somit auf dem Strahl AB liegen. Ist $\overrightarrow{AE}$ ein Repräsentant von $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{u}$, so ist $|AE| = |\lambda\mu|\cdot|AB|$ und (wegen $\lambda\cdot\mu > 0$) E ein Punkt des Strahls AB. Somit sind D und E identisch, es gilt also $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$ und somit die Behauptung.

5. Nach Definition 3.5 ist das Produkt $\lambda\cdot\vec{u}$ der Pfeilklasse $\vec{u}$ mit der Zahl λ eine Pfeilklasse, die durch einen Pfeil $\overrightarrow{AC}$ mit $|AC| = |\lambda|\cdot|AB|$ repräsentiert wird. Für $\lambda = 0$ ist also $|AC| = 0$ und somit $A = C$. Der Pfeil $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA}$ ist somit ein Repräsentant der Nullpfeilklasse (siehe den Beweis von Satz 3.3 A3 auf S. 93f.), $0\cdot\vec{u}$ also die Nullpfeilklasse.

6. Der Bildpunkt eines beliebigen Punktes P bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckungsfaktor $\lambda \neq 0$ und dem Streckzentrum A ist definiert als der Punkt P' mit $|AP'| = |\lambda|\cdot|AP|$ und

- P' liegt auf dem Strahl AP, falls $\lambda > 0$;
- P' liegt auf dem zu AP entgegengesetzten Strahl, falls $\lambda < 0$.

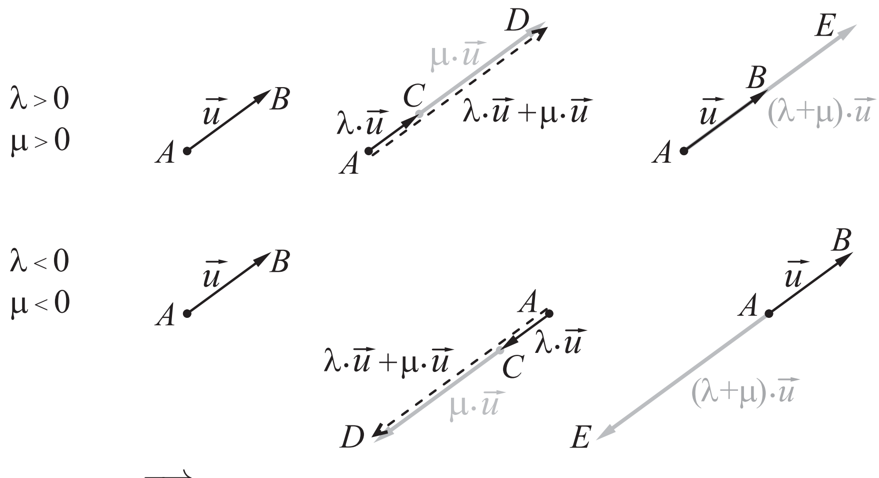


Die in dem Beweis auf S. 97 geführte Argumentation berücksichtigt auch den Fall $\lambda < 0$.

7. $\underline{\lambda > 0,\ \mu > 0}$: Ist $\overrightarrow{AB}$ ein Repräsentant von $\vec{u}$, so gilt für einen Repräsentanten $\overrightarrow{AC}$ von $\lambda\cdot\vec{u}$: $|AC| = \lambda\cdot|AB|$ und $\overrightarrow{AC}$ ist gleich orientiert zu $\overrightarrow{AB}$. Für einen Repräsentanten $\overrightarrow{CD}$ von $\mu\cdot\vec{u}$ gilt $|CD| = \mu\cdot|AB|$; $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{CD}$ sind wegen $\mu > 0$ ebenfalls gleich orientiert. Somit gilt $|AD| = \mu\cdot|AB| + \lambda\cdot|AB| = (\lambda+\mu)\cdot|AB|$.

Ein Repräsentant $\overrightarrow{AE}$ von $(\lambda+\mu)\cdot\vec{u}$ muss wegen $\lambda > 0, \mu > 0$ gleich orientiert zu $\overrightarrow{AB}$ sein, und es muss $|AE| = (\lambda+\mu)\cdot|AB|$ gelten.

Die Repräsentanten $\overrightarrow{AD}$ von $\lambda\cdot\vec{u} + \mu\cdot\vec{u}$ und $\overrightarrow{AE}$ von $(\lambda+\mu)\cdot\vec{u}$ sind somit identisch, es gilt daher $\lambda\cdot\vec{u} + \mu\cdot\vec{u} = (\lambda+\mu)\cdot\vec{u}$.



$\underline{\lambda < 0,\ \mu < 0}$: Ist $\overrightarrow{AB}$ ein Repräsentant von $\vec{u}$, so gilt für einen Repräsentanten $\overrightarrow{AC}$ von $\lambda\cdot\vec{u}$: $|AC| = |\lambda|\cdot|AB|$ und $\overrightarrow{AC}$ ist entgegengesetzt orientiert zu $\overrightarrow{AB}$. Für einen Repräsentanten $\overrightarrow{CD}$ von $\mu\cdot\vec{u}$ gilt $|CD| = |\mu|\cdot|AB|$ und $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ sind wegen $\mu < 0$ ebenfalls entgegengesetzt orientiert. Damit sind $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{CD}$ gleich orientiert. Es gilt daher $|AD| = |\mu|\cdot|AB| + |\lambda|\cdot|AB| = |\lambda+\mu|\cdot|AB|$ und $\overrightarrow{AD}$ ist entgegengesetzt orientiert zu $\overrightarrow{AB}$.

Ein Repräsentant $\overrightarrow{AE}$ von $(\lambda+\mu)\cdot\vec{u}$ muss wegen $\lambda < 0, \mu < 0$ entgegengesetzt orientiert zu $\overrightarrow{AB}$ sein, und es muss $|AE| = |\lambda+\mu|\cdot|AB|$ gelten.

Auch in diesem Falle sind die Repräsentanten $\overrightarrow{AD}$ von $\lambda\cdot\vec{u} + \mu\cdot\vec{u}$ und $\overrightarrow{AE}$ von $(\lambda+\mu)\cdot\vec{u}$ somit identisch, es gilt daher $\lambda\cdot\vec{u} + \mu\cdot\vec{u} = (\lambda+\mu)\cdot\vec{u}$.