Lösungen der Aufgaben zu Abschnitt 3.2

1. A1. Nach der Definition 3.6 der n-Tupel-Addition und aufgrund des Kommutativgesetzes der Addition reeller Zahlen gilt:

$$\begin{aligned}\vec{x}+\vec{y} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1+x_1 \\ y_2+x_2 \\ \vdots \\ y_n+x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{y}+\vec{x}.\end{aligned}$$

S1. Nach der Definition 3.6 der Multiplikation von n-Tupeln mit reellen Zahlen gilt: $1\cdot\vec{x} = 1\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot x_1 \\ 1\cdot x_2 \\ \vdots \\ 1\cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{x}.$

S2. Für beliebige Komponenten x_i $(i = 1 \ldots n)$ eines beliebigen n-Tupels $\vec{x}$ und beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt wegen der Assoziativität der Multiplikation reeller Zahlen $(\lambda\cdot\mu)\cdot x_i = \lambda\cdot(\mu\cdot x_i)$. Die n-Tupel $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{x}$ und $\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})$ stimmen somit in allen Komponenten überein, es gilt daher $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{x} = \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})$.

S4. Für beliebige Komponenten x_i $(i = 1 \ldots n)$ eines beliebigen n-Tupels $\vec{x}$ und beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt nach dem Distributivgesetz der reellen Zahlen $(\lambda+\mu)\cdot x_i = \lambda\cdot x_i + \mu\cdot x_i$. Die n-Tupel $(\lambda+\mu)\cdot\vec{x}$ und $\lambda\cdot\vec{x} + \mu\cdot\vec{x}$ stimmen somit in allen Komponenten überein, es gilt daher $(\lambda+\mu)\cdot\vec{x} = \lambda\cdot\vec{x} + \mu\cdot\vec{x}$.

2. Die Eindeutigkeit des Null-n-Tupels ergibt sich aus dessen in Satz 3.6 enthaltener Eigenschaft $\vec{x} + \vec{o} = \vec{x}$, womit für jede Komponente o_i eines Null-n-Tupels $x_i + o_i = x_i$ und deshalb $o_i = 0$ (für $j = 1 \ldots n$) gelten muss. Alle Komponenten von $\vec{o}$ müssen also Null sein, damit ist $\vec{o}$ eindeutig bestimmt.

Die Eindeutigkeit des Gegen-n-Tupels zu einem n-Tupel $\vec{x}$ lässt sich auf ähnliche Weise begründen. Durch die Eigenschaft $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{o}$ wird jede Komponente x_i^* von $-\vec{x}$ eindeutig bestimmt: $x_i^* = -x_i$.

3. Mit dem Satz 1.1 (siehe Abschnitt 1.3.4 des Buches) wurde bereits für beliebige homogene LGS gezeigt, dass die Summe zweier Lösungen stets eine Lösung des LGS ist und dass auch ein beliebiges reelles Vielfaches einer Lösung wiederum eine Lösung ist. Die Addition von Lösungs-n-Tupeln (die in Abschnitt 1.3.4 horizontal geschrieben wurden) und die Multiplikation von Lösungs-n-Tupeln mit reellen Zahlen führt also nicht aus der Lösungsmenge L eines homogenen LGS in n Variablen hinaus.

Die Aussagen A1, A2 und S1-S4 des Satzes 3.6 gelten, da sie Rechenregeln beinhalten, die für alle n-Tupel, also auch für Lösungen homogener LGS in n Variablen gelten.

Es bleibt also lediglich zu zeigen, dass die Lösungsmenge eines beliebigen homogenen LGS das „Null-n-Tupel" $\vec{o}$ enthält sowie für jedes Lösungs-n-Tupel

$\vec{x}$ auch das „Gegen-n-Tupel“ $-\vec{x}$ eine Lösung ist. Dass $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Lösung eines homogenen LGS in n Variablen ist, ist unmittelbar einsichtig. Da sich weiterhin das „Gegen-n-Tupel“ $-\vec{x}$ eines beliebigen Lösungs-n-Tupels $\vec{x}$ durch $(-1)\cdot\vec{x}$ darstellen lässt, gehört auch dieses der Lösungsmenge L an.