Lösungen der Aufgaben zu Abschnitt 3.4

1. a) $\vec{x} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ mit $\lambda = -\frac{7}{15}, \mu = \frac{16}{5}$

b) $\vec{x}$ ist nicht als Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darstellbar

c) Es gibt unendlich viele Linearkombinationen der Form $\vec{x} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w}$. Das entsprechende lineare Gleichungssystem besitzt eine einparametrige Lösungsmenge: $\lambda = \frac{37\,t-39}{60}$, $\mu = \frac{71\,t-57}{120}$, $\nu = t$.

2. a) $\vec{x} = -1\cdot\vec{u} + 1\cdot\vec{v} + 2\cdot\vec{w}$

b) $\vec{x} = -\frac{17}{23}\cdot\vec{u} - \frac{7}{69}\cdot\vec{v} + \frac{29}{46}\cdot\vec{w}$

c) Eine Darstellung von $\vec{x}$ als Linearkombination von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist nicht möglich.

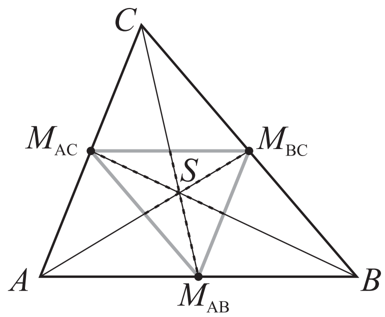
3. Angenommen, λ wäre von Null verschieden, so würde aus $\vec{o} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$ folgen:
$$\vec{u} = -\tfrac{\mu}{\lambda}\,\vec{v},$$
was im Widerspruch dazu steht, dass $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht kollinear sind. Wäre $\mu\neq 0$, so würde analog $\vec{v} = -\frac{\lambda}{\mu}\,\vec{u}$ folgen, was ebenfalls bedeutete, dass $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kollinear sind. Also kann weder λ noch μ von Null verschieden sein.

4. a) M_1 ist komplanar. Es gilt z. B.:
$$3\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} + (-3)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

b) M_2 ist nicht komplanar. Das Gleichungssystem
$$\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \nu\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
hat nur die triviale Lösung.

5. Es seien drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gegeben und es seien $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kollinear, d. h. es existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \lambda\cdot\vec{w}$ oder $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\vec{w} = \mu\cdot\vec{v}$. Eine dieser beiden Bedingungen reicht für den Beweis, wir nehmen an, es sei $\vec{v} = \lambda\cdot\vec{w}$. Dann ist $\vec{v} = 0\cdot\vec{u} + \lambda\cdot\vec{w}$, nach Definition 3.8 sind $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ komplanar.

6. Der Schwerpunkt S eines Dreieck ΔABC lässt sich ausdrücken durch (siehe Beispiel 3.9 auf S. 119 des Buches): $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AC}$.



Für den Schwerpunkt S_M des Seitenmittendreiecks $\Delta M_{AB}M_{BC}M_{CA}$ gilt:
$$\overrightarrow{M_{AB}S_M} = \tfrac{1}{3}\,\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} + \tfrac{1}{3}\,\overrightarrow{M_{AB}M_{AC}}.$$
Mit $\overrightarrow{AM_{AB}} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM_{AC}} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AM_{BC}} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AS_M} &= \overrightarrow{AM_{AB}} + \overrightarrow{M_{AB}S_M} = \overrightarrow{AM_{AB}} + \tfrac{1}{3}\,\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} + \tfrac{1}{3}\,\overrightarrow{M_{AB}M_{AC}} \\
&= \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}-\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}-\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BA}+\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}-\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}-\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}+\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}-\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}-\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}-\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{6}\,\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{6}\,\overrightarrow{AC} - \tfrac{1}{6}\,\overrightarrow{AB} \\
&= \tfrac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\,\overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{AS}.
\end{aligned}$$

7. Es sei E der Schnittpunkt der Verbindungsstrecke des Punktes A mit dem Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ und der Diagonalen $\overline{BD}$. Zu zeigen ist, dass gilt:

$$\overrightarrow{BE} = \tfrac{1}{3}\,\overrightarrow{BD} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{AE} = \tfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AM_{BC}}.$$

Bekannt ist, dass $\overrightarrow{BE}$ und $\overrightarrow{BD}$ sowie $\overrightarrow{AE}$ und $\overrightarrow{AM_{BC}}$ jeweils zueinander kollinear sind, also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ existieren mit:

$$\overrightarrow{BE} = \lambda\,\overrightarrow{BD} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{AE} = \mu\,\overrightarrow{AM_{BC}}.$$

Des Weiteren gilt

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + (-1)\cdot\overrightarrow{DC} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AM_{BC}} = \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}.$$

Da das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist, gilt $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ und somit $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + (-1)\cdot\overrightarrow{AB}$. Daher ergibt sich

$$\overrightarrow{BE} = \lambda\,\overrightarrow{BC} - \lambda\,\overrightarrow{AB} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{AE} = \mu\,\overrightarrow{AB} + \tfrac{\mu}{2}\,\overrightarrow{BC}.$$

Unter Verwendung der Beziehung $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}$ ergibt sich daraus

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + (-1)\cdot\overrightarrow{BE} = \mu\,\overrightarrow{AB} + \tfrac{\mu}{2}\,\overrightarrow{BC} - \lambda\,\overrightarrow{BC} + \lambda\,\overrightarrow{AB}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} - \mu\,\overrightarrow{AB} - \tfrac{\mu}{2}\,\overrightarrow{BC} + \lambda\,\overrightarrow{BC} - \lambda\,\overrightarrow{AB} &= \vec{o} \\
(1-\mu-\lambda)\;\overrightarrow{AB} + \left(-\tfrac{\mu}{2}+\lambda\right)\;\overrightarrow{BC} &= \vec{o}.
\end{aligned}$$

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ sind, da sie ein Parallelogramm aufspannen, nicht kollinear. Deshalb kann der Nullvektor nur auf triviale Weise als Linearkombination dieser Vektoren entstehen (siehe Aufgabe 3), es muss also gelten:

$$\begin{aligned}
1 - \mu - \lambda &= 0 \\
-\tfrac{\mu}{2} + \lambda &= 0\,.
\end{aligned}$$

Durch Lösen dieses LGS ergibt sich $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{2}{3}$, also $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AM_{BC}}$ und somit die Behauptung.