Lösungen der Aufgaben zu Abschnitt 3.5

1. a) Vektor b) nicht definiert c) nicht definiert
d) Vektor e) nicht definiert f) Vektor

2. a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7{,}5$ b) $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

3. Durch doppelte Anwendung von Satz 3.13, 3 (Distributivgesetz) ergibt sich

$$(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{c}+\vec{d}) \;=\; (\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{d} \;=\; \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d}.$$

4. Geeignete Gegenbeispiele sind u.a.:
a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, damit gilt $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = 0$ und $\vec{u}^2 \cdot \vec{v}^2 = 1$.

5. a) $t = -5$
b) $t_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{89} - 7\right) \approx 1{,}217;\;\; t_2 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{89} - 7\right) \approx -8{,}217$
c) $t_1 = 0,\;\; t_2 = -10$

6. a) $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = 7{,}5\,;\;\; |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = \sqrt{5} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5} = 7{,}5$
b) $|\vec{x}\cdot\vec{y}| = 0\,;\;\; |\vec{x}|\cdot|\vec{y}| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$
c) $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = 0\,;\;\; |\vec{u}|\cdot|\vec{v}| = \frac{1}{4}\sqrt{38} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{\frac{57}{2}}$

7. Eine Begründung kann leicht anhand der Definitionen des Skalarprodukts und des Betrages oder anhand von Satz 3.13 gegeben werden.

8. a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

Natürlich erfüllen auch beliebige reellwertige Vielfache $t\cdot\vec{n}$ (mit $t \neq 0$) dieser Vektoren die jeweils gegebenen Bedingungen.

9. a) $\left|\overline{AS}\right| = \left|\overline{BS}\right| = \left|\overline{CS}\right| = \left|\overline{DS}\right| = \sqrt{13{,}5} \approx 3{,}674$
b) Alle Seitenflächen haben eine Höhe von 3,35.
c) $\angle\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}\right) \approx 54{,}7°,\;\; \angle\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}\right) \approx 48{,}2°,\;\; \angle\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1S}\right) \approx 63{,}4°,$
$\angle\left(\overrightarrow{SM_1}, \overrightarrow{SM_2}\right) \approx 53{,}1°$

10. a) Wir betrachten ein Parallelogramm mit Bezeichnungen nach Abb. 3.45 auf S. 132 des Buches. Die Diagonalenvektoren lassen sich darstellen durch $\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d_2} = -\vec{a} + \vec{b}$. Aus der Voraussetzung $|\vec{d_1}| = |\vec{d_2}|$ folgt $\vec{d_1}^2 = \vec{d_2}^2$, also

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (-\vec{a} + \vec{b})^2$$
$$\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$$
$$2\vec{a}\vec{b} = -2\vec{a}\vec{b}$$

und somit die Behauptung $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Das Parallelogramm besitzt einen rechten Winkel und ist deshalb ein Rechteck.

b) Es ist zu zeigen, dass unter der Voraussetzung $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ die Behauptung $|\vec{d_1}| = |\vec{d_2}|$ gilt (Bezeichnungen entsprechend Abb. 3.45). Der Beweis erfolgt wie in Teil a), jedoch in umgekehrter Richtung.

c) Wir verwenden die Bezeichnungen aus Abb. 3.45 und setzen (da von einem Rhombus ausgegangen wird) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ voraus. Dann gilt

$$\vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = -|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 = 0$$

und somit die Behauptung $\vec{d_1} \perp \vec{d_2}$.

11. $W = |\vec{F}_G| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \angle(\vec{F}_G, \vec{s}) = 130\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 8\,\mathrm{m} \cdot \cos(90^\circ + 25^\circ) = -4{,}31\,\mathrm{kJ}$. Die zu verrichtende Arbeit beträgt 4,31 kJ.

12. $W = 3263\,\mathrm{kJ}$