Lösungen der Aufgaben zu Abschnitt 3.6

1. 1. Nach Definition 3.11 ist $|\vec{u}\times\vec{o}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{o}|\cdot\sin\angle(\vec{u},\vec{o})$). Obwohl der Sinus des Winkels zwischen zwei Vektoren, von denen einer der Nullvektor ist, nicht bestimmt werden kann, ist dieses Produkt Null (wegen $|\vec{o}|=0$) Somit ist $|\vec{u}\times\vec{o}|=0$ und daher $\vec{u}\times\vec{o}=\vec{o}$. Ebenso gilt $\vec{o}\times\vec{u}=\vec{o}$.

2. Da $\angle(\vec{u},\vec{u})=0$, ist $\sin\angle(\vec{u},\vec{u})=0$ und somit $|\vec{u}\times\vec{u}|=0$, also $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{o}$.

3. Sind zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kollinear, so ist $\sin\angle(\vec{u},\vec{u})=0$, woraus wiederum unmittelbar die Behauptung folgt.

4. Sind zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonal, so ist $\sin\angle(\vec{u},\vec{v})=1$. Aus Definition 3.11 folgt unmittelbar $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$.

Die Begründungen hätten in ähnlicher Weise auch anhand der Flächeninhalte der von den jeweiligen Vektoren aufgespannten Parallelogramme gegeben werden können.

2. Nach Definition 3.11 ist $|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot\sin^2\angle(\vec{u},\vec{v})$.
Nach Satz 3.17 ist $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot\cos^2\angle(\vec{u},\vec{v})$. Es gilt also

$$\begin{aligned}|\vec{u}\times\vec{v}|^2+(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 &= |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot\sin^2\angle(\vec{u},\vec{v}) + |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot\cos^2\angle(\vec{u},\vec{v})\\ &= |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot\left(\sin^2\angle(\vec{u},\vec{v})+\cos^2\angle(\vec{u},\vec{v})\right)\\ &= |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\end{aligned}$$

und somit die Behauptung.

3. a) $\begin{pmatrix}6\\0\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-36\\6\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}2\\-3\\-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\7\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35\\-10\\20\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}2\\6\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-6\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18\\36\\-30\end{pmatrix}$

4. Die Vektoren $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$ bilden ein Gegenbeispiel.

Es ist $\vec{v}\times\vec{w}=\begin{pmatrix}-6\\10\\-22\end{pmatrix}$ und $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{pmatrix}-64\\10\\22\end{pmatrix}$,

aber $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\-10\\10\end{pmatrix}$ und $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=\begin{pmatrix}-50\\30\\30\end{pmatrix}$.

5. Es ist $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}5\\-4\\-1\end{pmatrix}$, zwei gegenüberliegende Seiten sind also gleich lang, parallel und gleich gerichtet.
Berechnung des Flächeninhalts:

$$A=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix}5\\-4\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}11\\11\\11\end{pmatrix}\right| = \sqrt{11^2+11^2+11^2}\approx 19{,}05$$

6. $V = \frac{1}{3}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{3}\left|\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}\right|$

$= \frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}\right| = \frac{110}{3} =\approx 36,7$

7. Die drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen einen Spat auf. Das Volumen V dieses Spats lässt sich (je nachdem in welcher Reihenfolge man die Vektoren betrachtet, welche Seitenfläche man also als Grundfläche ansieht) durch $V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$, $V = |(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}|$ sowie $V = |(\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v}|$ berechnen. Demnach müssen die Beträge der drei Spatprodukte gleich sein.