## Lösungen der Aufgaben zu Abschnitt 5.2

**1.** a) Die Aussage ist falsch.
Gegenbeispiel: Die beiden Vektoren $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ liegen nicht in dem von $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$. Ihre Summe ist jedoch der Nullvektor von $\mathbb{R}^2$, dieser gehört jedem Unterraum von $\mathbb{R}^2$ an.

b) Die Aussage ist falsch.
Gegenbeispiel: Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ liegen beide nicht in dem von $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ und ihre Summe $\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ auch nicht.

c) Die Aussage ist richtig. Weil $\vec{u} \in U$ gilt, würde aus $\vec{u}+\vec{v} \in U$ folgen:

$$\vec{u}+\vec{v}-\vec{u}=\vec{v}\,\in\,U,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Damit kann $\vec{u}+\vec{v} \in U$ nicht gelten.

**2.** $U_1$ und $U_3$ sind keine Unterräume, $U_2$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

Begründungen:

a) Der Nullvektor $\vec{o}$ ist nicht Element von $U_1$, somit ist $U_1$ kein Unterraum.

b) Weil der Nullvektor offenbar in $U_2$ liegt, gilt $U_2 \neq \{\}$.
Sind $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}v_1'\\v_2'\\v_3'\end{pmatrix} \in U_2$, so gilt $v_1+v_2=v_3,\ v_1'+v_2'=v_3'$, und somit $(v_1+v_1')+(v_2+v_2')=(v_3+v_3')$. Also ist $\begin{pmatrix}v_1+v_1'\\v_2+v_2'\\v_3+v_3'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_1'\\v_2'\\v_3'\end{pmatrix} \in U_2$.
Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda\, v_1+\lambda\, v_2=\lambda v_3$, also ist $\begin{pmatrix}\lambda\, v_1\\\lambda\, v_2\\\lambda\, v_3\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \in U_2$.
Diese drei Eigenschaften besagen, dass $U_2$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

c) Der Vektor $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ist offenbar ein Element von $U_3$. Aber das $(-1)$-Fache dieses Vektors, also $(-1)\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ liegt nicht in $U_3$, sodass $U_3$ kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

**3.** Die Menge aller konvergenten Zahlenfolgen ist ein Unterraum des Vektorraumes der Folgen $(a_n)$ reeller Zahlen, denn sie erfüllt alle Bedingungen des Unterraumkriteriums. Da konvergente Folgen existieren, ist die Menge nicht leer. Da nach den Grenzwertsätzen die Summe zweier konvergenter Folgen ebenfalls konvergiert und beliebige reelle Vielfache konvergenter Folgen ebenfalls konvergieren, sind auch U1 und U2 erfüllt.

**4.** Es lassen sich verschiedenste Gegenbeispiele angeben. Beispielsweise ist jedes der in Kapitel 1 betrachteten Gleichungssysteme, die eindeutig lösbar sind (mit Ausnahme der homogenen Gleichungssysteme, die nur die triviale Lösung besitzen) ein Gegenbeispiel, denn ist zum Beispiel $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ die eindeutige Lösung eines LGS, so ist z. B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ keine Lösung, womit also die Bedingungen U1 und U2 des Unterraumkriteriums nicht erfüllt sind.

**5.** Es wird nachgewiesen, dass die Bedingungen des Unterraumkriteriums erfüllt sind.

– Die Menge aller $2 \times 2$-Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist offensichtlich nicht leer, da sie z. B. die Nullmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ enthält.

– Für zwei Matrizen $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ ist $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & 0 \\ 0 & b_1+b_2 \end{pmatrix}$ wiederum eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (mit $a = a_1+a_2$, $b = b_1+b_2$).

– Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda\, A = \begin{pmatrix} \lambda\, a & 0 \\ 0 & \lambda\, b \end{pmatrix}$ ebenfalls eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

**6.** Wir betrachten zwei Unterräume von $\mathbb{R}^2$ (siehe dazu Beispiel 5.7 auf S. 173):
$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; r \in \mathbb{R} \right\}$, $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; r \in \mathbb{R} \right\}$
Die Vereinigungsmenge $U_1$ und $U_2$ enthält somit die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, nicht aber deren Summe $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, was im Widerspruch zu der Eigenschaft U1 des Unterraumkriteriums steht.