## Lösungen der Aufgaben zu Abschnitt 5.3

**1.** a) $A$ lässt sich nicht als Linearkombinationen der beiden gegebenen Matrizen darstellen.

a) $B$ lässt sich als Linearkombinationen der beiden gegebenen Matrizen darstellen: $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**2.** $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ ist der gesamte Vektorraum der Polynome höchstens zweiten Grades. Ist $p$ mit $p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ ein beliebiges Polynom höchstens zweiten Grades, so lässt sich $p$ als Linearkombination von $p_1, p_2$ und $p_3$ darstellen:

$$\begin{aligned} p(x) &= a\,x^2 + b\,x + c = (a-b)\,x^2 + (b-c)\left(x^2+x\right) + c\,(x+1) \\ &= (a-b)\,p_3(x) + (b-c)\,p_2(x) + c\,p_1(x). \end{aligned}$$

**3.** $E$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$, wenn sich jeder Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination der drei Vektoren von $E$ darstellen lässt, also $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ existieren mit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dies ist gleichbedeutend mit der Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \lambda + \mu + \nu &= x \\ \mu + \nu &= y \\ \nu &= z\,. \end{aligned}$$

Dieses LGS ist für beliebige $x, y, z$ lösbar, die (eindeutige) Lösung ist $\lambda = x-y$, $\mu = y-z$, $\nu = z$.

**4.** Um den Beweis einfacher aufschreiben zu können, nehmen wir eine Umnummerierung vor und gehen davon aus, dass die zwei n. V. kollinearen Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ seien und $\vec{e}_2 \neq \vec{o}$ ist. Dann existiert $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\vec{e}_1 = \mu\,\vec{e}_2$.

Da $E = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$ ein Erzeugendensystem von $V$ ist, existieren für jeden Vektor $\vec{x} \in V$ reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\,\vec{e}_i = \lambda_1\,\vec{e}_1 + \lambda_2\,\vec{e}_2 + \lambda_3\,\vec{e}_3 + \lambda_4\,\vec{e}_4 + \ldots + \lambda_k\,\vec{e}_k \\ &= \lambda_1\,\mu\,\vec{e}_2 + \lambda_2\,\vec{e}_2 + \lambda_3\,\vec{e}_3 + \lambda_4\,\vec{e}_4 + \ldots + \lambda_k\,\vec{e}_k \\ &= (\lambda_1\,\mu + \lambda_2)\,\vec{e}_2 + \lambda_3\,\vec{e}_3 + \lambda_4\,\vec{e}_4 + \ldots + \lambda_k\,\vec{e}_k\,. \end{aligned}$$

Somit ist $\vec{x}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{e}_2, \ldots \vec{e}_k$ darstellbar; durch Einführung neuer Bezeichnungen $\lambda'_2 = \lambda_1\,\mu + \lambda_2$, $\lambda'_3 = \lambda_3$, $\lambda'_4 = \lambda_4, \ldots, \lambda'_k = \lambda_k$ lässt sich dies besonders deutlich aufschreiben:

$$\vec{x} = \sum_{i=2}^{k} \lambda'_i\,\vec{e}_i\,.$$

Da für $\vec{x}$ ein beliebiger Vektor aus $V$ betrachtet wurde, lässt sich jeder Vektor des Vektorraumes $V$ als Linearkombination von $\vec{e}_2, \ldots \vec{e}_k$ ausdrücken; somit ist $\{\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k\} = E \setminus \{\vec{e}_1\}$ ein Erzeugendensystem von $V$. Aufgrund der eingangs gemachten Bemerkung zur Umnummerierung der Vektoren $\vec{e}_j, \vec{e}_i$ in $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ist der Satz damit bewiesen.

**5.** Wir weisen nach, dass jeder Vektor von $U+V$ auch zu $\langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \rangle$ gehört und umgekehrt.

- Es sei $\vec{x} \in U+V$, d. h. nach Definition 5.3 $\vec{x} = \vec{u}+\vec{v}$ mit $\vec{u} \in U$, $\vec{v} \in V$. Da $E_U = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ und $E_V = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ Erzeugendensysteme von $U$ bzw. $V$ sind, existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_m$ mit $\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{u}_i$ und $\vec{v} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{v}_i$. Daraus ergibt sich
$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{v}_i ,$$
also ist $\vec{x}$ eine Linearkombination der Vektoren $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ und somit Element der linearen Hülle $\langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \rangle$.
- Ist umgekehrt $\vec{x} \in \langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \rangle$, so lässt sich $\vec{x}$ nach Definition 5.4 als Linearkombination von $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ darstellen, es existieren also $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_m$ mit
$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{v}_i .$$
Da $E_U = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ und $E_V = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ Erzeugendensysteme von $U$ bzw. $V$ sind, ist $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{u}_i \in U$ und $\sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{v}_i \in V$. Somit ist $\vec{x}$ als Summe eines Vektors aus $U$ und eines Vektors aus $V$ darstellbar; nach Definition 5.3 gilt also $\vec{x} \in U+V$.

**6.** Löst man das der Vektorgleichung $\lambda_1 \vec{a}+\lambda_2 \vec{b}+\lambda_3 \vec{c}+\lambda_4 \vec{d} = \vec{o}$, entsprechende LGS, so erhält man eine einparametrige Lösungsmenge:
$\lambda_1 = -2t$, $\lambda_2 = 3t$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = t$.
Die Vektoren sind daher linear abhängig, z. B. ist $-2\vec{a} + 3\vec{b} + 0\vec{c} + 1\vec{d} = \vec{o}$. Der Vektor $\vec{a}$ lässt sich somit als Linearkombination von $\vec{b}$ und $\vec{d}$ darstellen, $\vec{b}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{d}$ sowie $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Der Vektor $\vec{c}$ lässt sich nicht als Linearkombination der anderen drei Vektoren darstellen.

**7.** Seien $M = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \ldots; \vec{u}_k\}$ und $N = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \ldots; \vec{u}_k; \vec{u}_{k+1}; \ldots; \vec{u}_l\}$ mit $l > k$, also $M \subset N$. Da $M$ linear abhängig ist, existieren $(\lambda_1; \ldots; \lambda_k) \neq (0; \ldots; 0)$ mit $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{u}_i = \vec{o}$. Fügt man den Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ noch $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_l$ mit $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_l = 0$ hinzu, so ist $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \vec{u}_i = \vec{o}$, wobei wegen $(\lambda_1; \ldots; \lambda_k) \neq (0; \ldots; 0)$ mindestens einer der Koeffizienten $\lambda_i$ (mit $1 \le i \le k$ und somit $1 \le i \le l$) von Null verschieden ist. Der Nullvektor lässt sich also auf nicht triviale Weise als Linearkombination von Vektoren der Menge $N$ darstellen, somit ist $N$ linear abhängig.

**8.** Die Vektoren $\vec{u} - \vec{v}$ und $\vec{u} + \vec{v}$ sind linear unabhängig.

Um dies nachzuweisen, ist zu zeigen, dass aus $\lambda(\vec{u} - \vec{v}) + \mu(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{o}$ folgt $\lambda = 0 = \mu$, der Nullvektor also nur als triviale Linearkombination von $\vec{u} - \vec{v}$ und $\vec{u} + \vec{v}$ darstellbar ist. Aus
$$\lambda(\vec{u} - \vec{v}) + \mu(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{o}$$

für $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$ folgt

$$(\lambda + \mu)\,\vec{u} + (\mu - \lambda)\,\vec{v} = \vec{o}.$$

Weil $\vec{v}$ und $\vec{u}$ linear unabhängig sind, ist eine solche Gleichheit nur im Fall $\lambda+\mu = 0 = \mu-\lambda$ möglich. Hieraus folgt $\lambda=0=\mu$, also die lineare Unabhängigkeit von $\vec{u} - \vec{v}$ und $\vec{u} + \vec{v}$.

**9.** Die Vektoren $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{v} + \vec{w}$ sind linear unabhängig.

Aus

$$\lambda\,(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) + \mu\,(\vec{u} + \vec{v}) + \nu\,(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{o}$$

für $\lambda$, $\mu$, $\nu \in \mathbb{R}$ folgt

$$(\lambda + \mu)\,\vec{u} + (\lambda + \mu + \nu)\,\vec{v} + (\lambda + \nu)\,\vec{w} = \vec{o}.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist $\lambda+\mu = 0$, $\lambda+\mu+\nu = 0$ und $\lambda + \nu = 0$. Setzt man die letzte Gleichung in die vorletzte ein, so folgt $\mu = 0$ und damit aus der ersten Gleichung $\lambda = 0$ sowie schließlich $\nu = 0$. Somit sind $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{u} + \vec{v}$ und $\vec{v} + \vec{w}$ linear unabhängig.

**10.** Alle drei Aussagen sind richtig.

a) Weil $U_1 \subseteq U_2 = \mathbb{R}^2$ gilt, ist $U_1 \cap U_2 = U_1$. Der Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ liegt in dem Vektorraum $U_1$ und erzeugt diesen.

b) Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ liegt in $U_2 = \mathbb{R}^2$ und ist vom Nullvektor verschieden. Als einelementige Menge ist $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ linear unabhängig; damit trifft die Aussage zu.

c) Die $U_1$ und $U_3$ erzeugenden Vektoren sind linear unabhängig, also enthält $U_1 \cup U_3$ zwei linear unabhängige Vektoren, und zwei solche Vektoren erzeugen $\mathbb{R}^2$ – die Aussage ist also richtig.

**11.** Der Beweis lässt sich indirekt führen. Dazu nimmt man an, die Menge $\{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k; \vec{v}\}$ sei linear abhängig, d. h. es existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und $\mu$ mit

$$\lambda_1\,\vec{u}_1 + \lambda_2\,\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_k\,\vec{u}_k + \mu\,\vec{v} \;=\; \vec{o}\,,$$

wobei mindestens einer der Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $\mu$ von Null verschieden ist. Wäre $\mu\neq0$, so würde gelten:

$$\vec{v} \;=\; -\tfrac{\lambda_1}{\mu}\,\vec{u}_1 - \tfrac{\lambda_2}{\mu}\,\vec{u}_2 - \ldots - \tfrac{\lambda_k}{\mu}\,\vec{u}_k \;=\; \textstyle\sum_{i=1}^{k}\left(-\tfrac{\lambda_k}{\mu}\right),$$

der Vektor $\vec{v}$ wäre also als Linearkombination von $\{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k\}$ darstellbar und somit von $\{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k\}$ linear abhängig. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, also ist $\mu = 0$. Wäre nun einer der Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ungleich Null, so würde dies wegen $\mu = 0$ bedeuten, dass $\{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k\}$ linear abhängig ist, was ebenfalls der Voraussetzung widerspräche. Somit müssen alle Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $\mu$ von Null verschieden sein; die Menge $\{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k; \vec{v}\}$ ist somit linear unabhängig.

**12.** Nach dem Satz 5.8 genügt es zu zeigen, dass jede $n$+1-elementige Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ linear abhängig ist (denn dann ist auch jede Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit mehr als $n$+1 Elementen linear abhängig).

Es seien $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_n^{(1)} \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ \vdots \\ u_n^{(2)} \end{pmatrix}$, $\ldots$, $\vec{u}_{n+1} = \begin{pmatrix} u_1^{(n+1)} \\ u_2^{(n+1)} \\ \vdots \\ u_n^{(n+1)} \end{pmatrix}$ Vektoren von $\mathbb{R}^n$. Um festzustellen, ob sich der Nullvektor auf nicht triviale Weise als Linearkombination von $\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_{n+1}$ darstellen lässt, d. h. ob Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ mit $(\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_{n+1}) \neq (0; 0; \ldots; 0)$ und $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \, \vec{u}_i = \vec{o}$ existieren, ist das lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \ldots & u_1^{(n)} & u_1^{(n+1)} & 0 \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & \ldots & u_2^{(n)} & u_2^{(n+1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n^{(1)} & u_n^{(2)} & \ldots & u_n^{(n)} & u_n^{(n+1)} & 0 \end{array} \right)$$

(siehe Abschnitt 1.3) zu lösen. Es handelt sich hierbei um ein homogenes LGS mit $n$ Gleichungen und $n+1$ Variablen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ und ist (da es sich um ein homogenes System handelt) lösbar. Der Rang dieses LGS ist höchstens gleich der Anzahl $n$ der Gleichungen, also in jedem Falle kleiner als $n+1$. Das LGS besitzt daher Lösungsmenge mit $n+1-r$ Parametern, also eine mindestens einparametrige Lösungsmenge. Daher existieren auch andere als die triviale Lösung und der Nullvektor lässt sich auf nicht triviale Weise als Linearkombination von $\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_{n+1}$ darstellen.