Lösungen der Aufgaben zu Abschnitt 5.4

1. • B ist linear unabhängig, wenn die Vektorgleichung

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw. das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 4\,\lambda_2 & + & 3\,\lambda_3 & = & 0 \\ 3\,\lambda_1 & + & 5\,\lambda_2 & - & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ -\,2\,\lambda_1 & + & 6\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

nur die triviale Lösung hat. Durch Lösen des LGS mithilfe des Gauss-Algorithmus ergibt sich $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, also die lineare Unabhängigkeit.

• B ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$, wenn die Vektorgleichung

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

bzw. das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 4\,\lambda_2 & + & 3\,\lambda_3 & = & x \\ 3\,\lambda_1 & + & 5\,\lambda_2 & - & 2\,\lambda_3 & = & y \\ -\,2\,\lambda_1 & + & 6\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & z \end{array}$$

für jeden Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ lösbar ist. Durch Lösen des LGS erhält man

$$\lambda_1 = \frac{-23\,z + 14\,y + 17\,x}{105}, \quad \lambda_2 = \frac{11\,z + 7\,y + x}{105}, \quad \lambda_3 = \frac{-z - 2\,y + 4\,x}{15},$$

das LGS ist also für beliebige x, y, z lösbar, und B ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

2. Durch Lösen der Vektorgleichung

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ als einzige Lösung; somit ist B linear unabhängig. Nach dem Satz 5.12 ist B damit eine Basis von $\mathbb{R}^4$, und die Aufgabe ist gelöst. Wir zeigen aber trotzdem noch, dass B ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$ ist. Dies trifft genau dann zu, wenn für jeden Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

lösbar ist. Dies ist der Fall, durch Lösen des entsprechenden LGS erhält man

$$\lambda_1 = \frac{x_4 - 3\,x_3 + 4\,x_2 + x_1}{8}, \quad \lambda_2 = \frac{3\,x_4 - x_3 + 3\,x_1}{8},$$

$$\lambda_3 = \frac{-7\,x_4 + 5\,x_3 - 4\,x_2 + x_1}{8}, \quad \lambda_4 = -\frac{x_4 - 3\,x_3 + 2\,x_2 + x_1}{4}.$$

3. $\vec{x} = (-21)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix}-4\\-5\\-6\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}7\\8\\7\end{pmatrix}$

4. Es gibt verschiedene Möglichkeiten der Lösung, z. B.:

- Die Vektoren $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, denn das lineare Gleichungssystem $\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&-1&-1&0\\1&0&-2&0&0\\0&1&0&1&0\\-1&-2&1&0&0\end{array}\right)$ hat nur die triviale Lösung. Jeder der weiteren Vektoren von X lässt sich somit auch als Linearkombination dieser 4 Vektoren darstellen.
- Durch die Vektoren der Menge X lässt sich jeder Vektor von $\mathbb{R}^4$ als Linearkombination darstellen (dazu reichen sogar die ersten vier Vektoren). Also ist $U = \langle X\rangle = \mathbb{R}^4$ und somit ist die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ mit den Basisvektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ auch eine Basis von U.

5. *Bemerkung*: Wenn Basen von Vektor- bzw. Unterräumen zu bestimmen sind, gibt es jeweils unendlich viele Lösungsmöglichkeiten, sodass die hier angegebenen Lösungen nur exemplarisch sein können.

a) Eine Basis von U_1 ist z. B. $B_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

b) Es ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+x_3} + 2x_4 &= 0\\ 2x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+2x_4} &= 0 \end{aligned}$$

zu bestimmen. Es werden dazu x_1 und x_2 als Parameter s bzw. t gesetzt. Dann ist $x_4 = \frac{-s-3t}{2}$ und $x_3 = -2s - t$. Es ergibt sich

$$L = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s\\t\\-2s-t\\\frac{-s-3t}{2}\end{pmatrix};\ s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix};\ s,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Da U_2 gerade die Lösungsmenge des o. a. linearen Gleichungssystems ist, erhalten wir als eine Basis von U_2: $B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\right\}$.

6. Es ist zu zeigen, dass die drei Vektoren linear unabhängig sind (drei linear unabhängige Vektoren bilden stets eine Basis von $\mathbb{R}^3$). Dazu muss nachgewiesen werden, dass das durch die Matrix $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\x&y&z&0\\x^2&y^2&z^2&0\end{array}\right)$ gegebene lineare

Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, also den Rang 3 hat (siehe Abschnitt 1.3). Dies ist bei einem homogenen LGS genau dann der Fall, wenn die einfache Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$ den Rang 3 hat. Wir formen diese Matrix mithilfe des Gauß-Algorithmus um und erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \\ 0 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{array}\right) \left| \begin{array}{l} \\ \cdot(-(y+x)) \\ \cdot 1 \end{array}\right.$$

$$\to \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \\ 0 & 0 & -(z-x)(y+x)+(z^2-x^2) \end{array}\right)$$

(Bei der letzten Umformung wurde die dritte binomische Formel verwendet.) Es ist also zu zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen nicht $-(z-x)(y+x)+(z^2-x^2) = 0$ sein kann. Wäre dies der Fall, so müsste gelten:

$$(1) \qquad (z-x)(y+x) = z^2 - x^2 \,.$$

Es sind nun zwei Fälle zu betrachten:

1. Fall: $z = -x$; in diesem Falle ist $z^2 - x^2 = 0$ und deshalb muss einer der beiden Faktoren auf der linken Seite von Gleichung (1) Null sein. Dann gilt $z = x$ oder $y = -x$ und somit $y = z$, in jedem Falle entsteht ein Widerspruch zur Voraussetzung $x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$.

2. Fall: $z \neq -x$; in diesem Falle ist $z + x \neq 0$ und die Multiplikation beider Seiten von (1) mit $(z + x)$ ist eine Äquivalenzumformung. Gleichung (1) erhält dadurch die Gestalt $y + x = z + x$. Somit gilt $y = z$, was ebenfalls im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

Es gilt also unter den gegebenen Voraussetzungen

$$-(z-x)(y+x)+(z^2-x^2) \neq 0\,.$$

Somit hat die o. a. Matrix den Rang drei und die angegebenen Vektoren sind linear unabhängig, bilden also eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

7. Lässt sich in $E = \{\vec{e}_1; \ldots; \vec{e}_l\}$ kein Vektor finden, der von $U = \{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k\}$ linear unabhängig ist, so lässt sich jeder Vektor von E als Linearkombination der Vektoren $\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k$ darstellen:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_{1i}\, \vec{u}_i \\ \vec{e}_2 &= \textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_{2i}\, \vec{u}_i \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \vec{e}_l &= \textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_{li}\, \vec{u}_i \end{aligned}$$

bzw. in kürzerer Schreibweise

$$\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ji}\, \vec{u}_i \quad (\text{für } j = 1 \ldots l).$$

Da E ein Erzeugendensystem von V ist, gibt es für jeden Vektor $\vec{x} \in V$ reelle Zahlen $\mu_1, \ldots \mu_l$ mit $\vec{x} = \sum_{j=1}^{l} \mu_j\, \vec{e}_j$, somit gilt also

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_{ji}\, \vec{u}_i \right) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{l} \mu_j \lambda_{ji} \right) \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{k} \nu_i\, \vec{u}_i$$

mit $\nu_i = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \lambda_{ji}$ für $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq k$. Also ist in diesem Falle jeder Vektor $\vec{x} \in V$ als Linearkombination von $\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k$ darstellbar; damit ist $U = \{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k\}$ bereits ein Erzeugendensystem und (wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit) eine Basis von V.

Existiert in $E = \{\vec{e}_1; \ldots; \vec{e}_l\}$ hingegen ein Vektor, der von $U = \{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k\}$ linear unabhängig ist (durch Umbenennen lässt sich erreichen, dass dies $\vec{e}_l$ ist) so ist $U_{k+1} = \{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k; \vec{e}_l\}$ eine linear unabhängige Teilmenge. Es wird nun überprüft, ob einer der Vektoren der Menge $E \backslash \{\vec{e}_l\} = \{\vec{e}_1; \ldots; \vec{e}_{l-1}\}$ von U linear unabhängig ist. Trifft dies für keinen der Vektoren zu, so ist U_{k+1} ein Erzeugendensystem (der Beweis erfolgt ebenso wie oben für U), der Satz ist also bewiesen. Gibt es jedoch in $E \backslash \{\vec{e}_l\} = \{\vec{e}_1; \ldots; \vec{e}_{l-1}\}$ einen Vektor, der von U_{k+1} linear unabhängig ist (o. B. d. A. sei dies $\vec{e}_{l-1}$), so ist auch $U_{k+2} = \{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k; \vec{e}_{l-1}; \vec{e}_l\}$ linear unabhängig.

Das Verfahren wird nun fortgesetzt, wobei sich mit jedem Schritt entweder herausstellt, dass $U_{k+m} = \{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k; \vec{e}_{l-m+1}; \ldots; \vec{e}_l\}$ ein Erzeugendensystem (und damit eine Basis) ist, womit das Verfahren abgebrochen wird, oder dass U_{k+m} durch einen weiteren Vektor aus E erneut zu einer linear unabhängigen Menge erweitert werden kann. Spätestens nachdem U durch alle Vektoren von E erweitert wurde, ist dann durch schrittweise Erweiterung von U durch Vektoren von E eine Basis gefunden.

8. Nach dem Satz 5.16 (Basisergänzungssatz) lässt sich jede linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraumes V durch Elemente eines Erzeugendensystems zu einer Basis von V ergänzen. Da nach dem Satz 5.18 alle Basen eines Vektorraumes gleich viele Vektoren enthalten und U ebenso viele Elemente enthält wie die Basis B, muss U bereits eine Basis sein.

9. Nach dem Satz 5.14 (Verkürzungssatz) ist jedes Erzeugendensystem E von V entweder eine Basis von V oder es existiert eine echte Teilmenge von E, die eine Basis von V ist. Da jede Basis von V n Elemente enthalten muss, existiert keine echte Teilmenge von E die Basis von V ist, denn jede echte Teilmenge von E hat weniger als n Elemente. Somit ist E eine Basis von V.

10. a) Offensichtlich ist $\mathcal{F}$ nicht leer, denn die „klassische“ Fibonacci-Folge $(1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; \ldots)$ erfüllt die Bedingung $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$. Weiterhin ist die Summe $(f_n) + (g_n)$ zweier beliebiger verallgemeinerter Fibonacci-Folgen (f_n) und (g_n) ebenfalls eine verallgemeinerte Fibonacci-Folge; aus $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ und $g_{n+2} = g_n + g_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ folgt

$$f_{n+2} + g_{n+2} = f_n + f_{n+1} + g_n + g_{n+1} = f_n + g_n + f_{n+1} + g_{n+1}\,.$$

Völlig analog zeigt man, dass für jede verallgemeinerte Fibonacci-Folge (f_n) auch die Folge $\lambda(f_n)$ eine (verallgemeinerte) Fibonacci-Folge ist.

Nach dem Unterraumkriterium (Satz 5.1) ist $\mathcal{F}$ somit ein Unterraum des Vektorraumes aller Folgen reeller Zahlen.

b) Jede verallgemeinerte Fibonacci-Folge ist durch die Angabe ihrer ersten beiden Glieder eindeutig bestimmt, denn mittels der Bildungsvorschrift $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ lassen sich daraus alle weiteren Glieder berechnen. Wir müssen also für Basisvektoren nur die ersten beiden Glieder angeben. Eine Basis des Vektorraumes der Fibonacci-Folgen ist $B = \{(b_n); (c_n)\}$ mit

$$b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_{n+2} = b_n + b_{n+1}, \quad c_1 = 0,\ c_1 = 1,\ c_{n+2} = c_n + c_{n+1}.$$

Die lineare Unabhängigkeit von $B = \{(b_n); (c_n)\}$ lässt sich bereits mithilfe der ersten beiden Folgenglieder zeigen. Eine Folge, deren erste beide Glieder Null sind, lässt sich nur auf triviale Weise als Linearkombination von (b_n) und (c_n) darstellen, dies gilt erst recht für den Nullvektor (die Folge, deren sämtliche Glieder Null sind).

$B = \{(b_n); (c_n)\}$ ist auch ein Erzeugendensystem, denn jede verallgemeinerte Fibonacci-Folge ist durch ihre ersten beiden Glieder bestimmt. Es lässt sich (wie in $\mathbb{R}^2$) mithilfe der Paare $(1; 0)$ und $(0; 1)$ jedes beliebige Paar reeller Zahlen erzeugen, also beliebige erste Folgenglieder $(f_1; f_2)$ einer verallgemeinerten Fibonacci-Folge. Somit lässt sich jede verallgemeinerte Fibonacci-Folge als Linearkombination von (b_n) und (c_n) erzeugen. $B = \{(b_n); (c_n)\}$ ist also eine Basis von $\mathcal{F}$; die Dimension von $\mathcal{F}$ ist 2.

11. a) Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Dies kann zum Beispiel mithilfe des CAS Maxima geschehen:

```
b1:[-1,1,0,1,0,-1,0,-1,1]$
b2:[0,-1,1,1,0,-1,-1,1,0]$
b3:[2/3,1/3,0,-1/3,1/3,1,2/3,1/3,0]$
m:[4,9,2,3,5,7,8,1,6]$
solve([lambda1*b1[1] + lambda2*b2[1] + s*b3[1] = m[1],
       lambda1*b1[2] + lambda2*b2[2] + s*b3[2] = m[2],
       lambda1*b1[3] + lambda2*b2[3] + s*b3[3] = m[3],
       lambda1*b1[4] + lambda2*b2[4] + s*b3[4] = m[4],
       lambda1*b1[5] + lambda2*b2[5] + s*b3[5] = m[5],
       lambda1*b1[6] + lambda2*b2[6] + s*b3[6] = m[6],
       lambda1*b1[7] + lambda2*b2[7] + s*b3[7] = m[7],
       lambda1*b1[8] + lambda2*b2[8] + s*b3[8] = m[8],
       lambda1*b1[9] + lambda2*b2[9] + s*b3[9] = m[9] ],
      [lambda1, lambda2, s]);
```

Als Lösung erhält man $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 2$, $s = 15$. Dies sind die Koordinaten des magischen Quadrats $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ bezüglich der in Beispiel 5.29 ermittelten Basis.

b) Eine Basis des Vektorraumes der magischen Quadrate der Kantenlänge 3, in der das magische Quadrat $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ ein Basisvektor ist, erhält man ausgehend von der Basis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

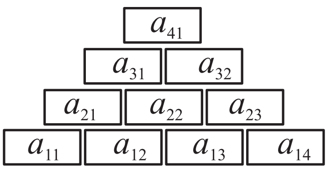
mithilfe von Satz 5.19. Dessen Voraussetzung $\mu \neq 0$ ist wegen der in a) ermittelten Koordinaten für jeden der Basisvektoren von B erfüllt, d. h. jeder dieser Basisvektoren darf gegen das in der Aufgabe genannte magische Quadrat ausgetauscht werden. Eine Basis, welche die Aufgabenstellung erfüllt, ist als z. B.:

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

12. a) Die zweite Reihe enthält $k-1$, die dritte Reihe $k-2$ Steine usw. Somit ist die Gesamtzahl der Steine einer Rechenmauer

$$n = 1 + 2 + \ldots + k = \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k\,(k+1)}{2}.$$

b) Wir nummerieren die Steine der Rechenmauer wie in der folgenden Abbildung.



Dann muss gelten:

$$\begin{aligned}
a_{21} &= a_{11} + a_{12} \\
a_{22} &= a_{12} + a_{13} \\
a_{23} &= a_{13} + a_{14} \\
a_{31} &= a_{21} + a_{22} = a_{11} + a_{12} + a_{12} + a_{13} = a_{11} + 2\,a_{12} + a_{13} \\
a_{32} &= a_{22} + a_{23} = a_{12} + a_{13} + a_{13} + a_{14} = a_{12} + 2\,a_{13} + a_{14} \\
a_{41} &= a_{31} + a_{32} = a_{11} + 2\,a_{12} + a_{13} + a_{12} + 2\,a_{13} + a_{14} \\
&= a_{11} + 3\,a_{12} + 3\,a_{13} + a_{14}\,.
\end{aligned}$$

Jede additive reelle Rechenmauer mit vier Grundsteinen lässt sich somit als n-Tupel

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{11}+a_{12} \\ a_{12}+a_{13} \\ a_{13}+a_{14} \\ a_{11}+2\,a_{12}+a_{13} \\ a_{12}+2\,a_{13}+a_{14} \\ a_{11}+3\,a_{12}+3\,a_{13}+a_{14} \end{pmatrix}$$

mit $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} \in \mathbb{R}$ schreiben. Dabei handelt es sich um eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}^{10}$. Es lässt sich leicht zeigen, dass für zwei beliebige Rechenmauern (mit Koeffizienten a_{ij} und b_{ij}) und für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ auch

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{11}+a_{12} \\ a_{12}+a_{13} \\ a_{13}+a_{14} \\ a_{11}+2\,a_{12}+a_{13} \\ a_{12}+2\,a_{13}+a_{14} \\ a_{11}+3\,a_{12}+3\,a_{13}+a_{14} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{14} \\ b_{11}+b_{12} \\ b_{12}+b_{13} \\ b_{13}+b_{14} \\ b_{11}+2\,b_{12}+b_{13} \\ b_{12}+2\,b_{13}+b_{14} \\ b_{11}+3\,b_{12}+3\,b_{13}+b_{14} \end{pmatrix}$$

sowie

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{11}+a_{12} \\ a_{12}+a_{13} \\ a_{13}+a_{14} \\ a_{11}+2\,a_{12}+a_{13} \\ a_{12}+2\,a_{13}+a_{14} \\ a_{11}+3\,a_{12}+3\,a_{13}+a_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} \\ \lambda a_{12} \\ \lambda a_{13} \\ \lambda a_{14} \\ \lambda a_{11}+\lambda a_{12} \\ \lambda a_{12}+\lambda a_{13} \\ \lambda a_{13}+\lambda a_{14} \\ \lambda a_{11}+2\,\lambda a_{12}+\lambda a_{13} \\ \lambda a_{12}+2\,\lambda a_{13}+\lambda a_{14} \\ \lambda a_{11}+3\,\lambda a_{12}+3\,\lambda a_{13}+\lambda a_{14} \end{pmatrix}$$

die Bedingungen an Rechenmauern erfüllen. Somit ist die Menge aller reellen Rechenmauern mit vier Grundsteinen nach dem Unterraumkriterium ein Unterraum von $\mathbb{R}^{10}$.

c) Eine Basis dieses Unterraumes ist, wie man leicht nachprüft,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Der Vektorraum der reellen Rechenmauern mit vier Grundsteinen ist demnach vierdimensional.

13. • Eine Basis von U_1 ist $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, also ist $\dim U_1 = 2$.

• Eine Basis von U_2 ist $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, also ist $\dim U_2 = 2$.

• Um eine Basis von $U_1 \cap U_2$ zu bestimmen, löst man das aus vier Gleichungen bestehende LGS, das die vier zu U_1 bzw. zu U_2 gehörenden Bedingungen enthält (jeder Vektor, der zu $U_1 \cap U_2$ gehört, muss alle vier Gleichungen erfüllen). Es ergibt sich eine einparametrige Lösungsmenge mit dem Basisvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, also ist $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$.

• Ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$ erhält man, indem man Erzeugendensysteme beider Unterräume vereinigt, also ist

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$. Allerdings sind diese 4 Vektoren nicht linear unabhängig, der Rang des sich ergebenden LGS ist 3.

• Eine Basis von $U_1 + U_2$ besteht daher nur aus drei Vektoren, z. B.:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

• Es ist also $\dim U_1 = 2$, $\dim U_2 = 2$, $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, $\dim(U_1 + U_2) = 3$. Tatsächlich gilt immer die *Dimensionsformel* (Satz 5.21):
$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2)$.